[UCI]I804:24011-200000234464

2007년 8월

敎育學碩士(數學敎育)學位論文

中等學校 數學의 位相幾何에 관한 考察

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

尹 泳 恩

中等學校 數學의
位相幾何에 관한 考察

A study on topological geometry in mathematics of secondary school

2007년 8월

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

尹 泳 恩

中等學校 數學의
位相幾何에 관한 考察

指導敎授　韓 承 局

이 論文을 敎育學碩士(數學敎育)學位 請求論文으로 提出합니다.

2007년　4월

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

尹　泳　恩

尹泳恩의 敎育學 碩士學位 論文을 認准합니다.

審査委員長　朝鮮大學校 敎授 _____印

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授 _____印

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授 _____印

2007년　6월

朝鮮大學校 敎育大學院

- 목　　차-

ABSTRACT

Ⅰ. 서　론

A. 중등수학에 있어서 위상기하의 필요성 ····· 1

B. 위상기하학의 역사적 개관 ····· 3

Ⅱ. 위상기하의 기본개념 고찰

A. 거리 ····· 9

B. 위상공간 ····· 12

C. 연속성 ····· 16

D. 위상동형 ····· 19

Ⅲ. 중등학교 수학에서의 위상기하

A. 현행 중등 교육과정의 분석 ····· 26

B. 오일러 정리 ····· 27

C. 한 붓 그리기 ····· 35

Ⅳ. 결론 및 제언 ····· 39

참고문헌 ····· 41

- 그 림 목 차 -

[그림Ⅱ-1] 점과 집합사이의 거리 ····· 11
[그림Ⅱ-2] 집합과 집합사이의 거리 ····· 11
[그림Ⅱ-3] 집합의 지름 ····· 12
[그림Ⅱ-4] 연속함수의 벤도식 ····· 18
[그림Ⅱ-5] 연속함수 역상의 벤도식 ····· 19
[그림Ⅱ-6] 선분과 곡선의 위상적 비교 ····· 22
[그림Ⅱ-7] 선분과 원의 위상적 비교 ····· 22
[그림Ⅱ-8] 평면에서의 위상동형 ····· 23
[그림Ⅱ-9] 입체에서의 위상동형 ····· 23
[그림Ⅱ-10] 입체에서의 위상동형 ····· 24
[그림Ⅱ-11] 입체에서의 위상동형이 아닌 예 ····· 24
[그림Ⅱ-12] 지하철 노선도 ····· 25
[그림Ⅲ-1] 볼록 다각형에서의 오일러 정리 ····· 29
[그림Ⅲ-2] 다면체에서의 오일러 정리 ····· 30
[그림Ⅲ-3] 데카르트-오일러 정리 ····· 31
[그림Ⅲ-4] 오일러 정리와 위상동형 ····· 32
[그림Ⅲ-5] 케니히스베르그의 다리 문제 ····· 36

ABSTRACT

A study on topological geometry in mathematics of secondary school

Youn Young-Eun
Advisor : Prof. Han Seung-gook Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

Topology is rapidly developing field which applies not only to subsidiary field of mathematics, but also applies to astrophysics, computer science, information technology and molecular biology. It helps students to improve geometric sense and space perception so that they analyze the given subject quickly and perceive characteristic. I have a think about it's necessary to prepare paper since this ability is one of the prerequisites that human resources of modern society should acquire.

As for theoretical background of topology, I would like to take

a look at historical overview of topology in the second chapter of this paper and summarized basic concept of topology which is represented by metric, topology, continuous and homeomorphic. In the third chapter, I researched into current status of topology in secondary school and Euler's theorem treated as high class education material in the first grade of middle school. And I also presented brief summary of one writing along with 'Koonigsberg's bridge problem' in relation with discrete mathematics of high school education.

The trend of secondary school is reducing importance of topology, however research for better education involving easy understanding of students and practical use is constantly required since topology teaches students how to analyze mathematical circumstances in their life and helps to improve geometrical intuition.

Ⅰ. 서　　론

A. 중등수학에 있어서 위상기하의 필요성

수학은 우리 사회에서 없어서는 안 될 필수적인 학문이다. 그 자체만으로도 계승, 발전되어야 할 큰 의미와 가치를 지닐 뿐만 아니라 다른 학문을 연구하는데 있어서도 중요한 도구적 역할을 하며 실제로 삶을 살아갈 때 논리적인 사고를 하고 문제를 효과적으로 해결해 나갈 수 있는 능력을 키워준다.

수학의 총체적인 목표는 '수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고, 수학적으로 사고하는 능력을 길러, 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기른다.'[10]이고 하위 목표는 크게 기능학습, 개념학습, 그리고 문제해결학습으로 분류될 수 있다. 이중에서도 문제해결학습을 강조하면서 수학교육의 근본적인 목표를 '문제해결력의 신장'이라고 주장하고 있다. 그러나 현실에서는 아직 많이 미흡한 것이 사실이다. 아직도 대다수의 학생들은 수학을 입시를 위한 도구로서의 기능 외에는 불필요한 과목이라는 생각을 하고 있다.

그런 생각을 가지게 되는 주된 이유 중에 하나는 수학과 실생활을 연결시켜주는 교육이 많이 부족하기 때문이라고 생각한다. 현실과 동떨어진 학문은 흥미가 덜하기 마련이고 따라서 이런 욕구를 만족시킬 수 있는 지도방법이 활발히 연구되어야 하겠다. 위상기하는 현실과 가까운 응용학문으로 볼 수 있기 때문에 이러한 것을 충족시킬 수 있는 분야가 될 수 있다.

위상기하학은 현대수학의 중요한 분야 중 하나로서 6차 교육과정에서는 '도형의 관찰'이라는 단원으로 중학교 1학년에서 다루어 왔었다. 위상기하학의 초보단계를 중학교 1학년에서부터 다루어 엄밀한 논리성만을 강조하던 기존의 기하학에서 벗어나 일상생활에서 볼 수 있는 기본적인 도형에 대한 직관

적 관찰을 통해 도형의 성질을 발견함으로써 귀납적 사고 활동을 할 수 있도록 하기 위해서였다. 또한 위상적 관점에서 문제를 관찰하고 분석함으로써 복잡한 도형을 성질이 같은 단순한 형태로 추상화시킬 수 있고 그것을 분류하는 사고 능력을 기를 수 있게 된다.

그러나 오늘날의 7차 교육과정에서는 6차에 실렸던 단일 폐곡선, 한붓그리기, 뫼비우스의 띠 등의 위상 기하에 관련된 내용이 7차에서는 전적으로 생략되고 겨우 심화과정으로 오일러 수만 간단히 다루는 등 위상기하 분야에 있어서 내용의 축소 또는 삭제가 이루어졌다.

이렇듯 교육과정의 변화로 인하여 그 중요성에 비해 소홀히 다뤄지게 된 중등수학에 있어서의 위상기하에 대하여 현실적인 문제점을 안타깝게 생각하면서 위상기하의 발전과정을 살펴보고 그 개념들을 고찰해보며 유용성과 가치에 대해 생각해 보고자 한다.

본문의 Ⅱ에서는 위상기하의 주요한 개념을 중등수학 교사에게 참고자료가 될 수 있도록 고찰해 보았으며 Ⅲ에서는 중등학교 수학에서의 위상기하학에 대하여 현재 교육과정에서의 위치를 알아보고 현재 중학교 1학년 심화과정으로 다루어지고 있는 오일러 정리를 좀 더 심도 있게 알아보았으며 고등학교 이산수학의 내용과 연계하여 한붓그리기에 대한 소개를 하였다.

위상기하는 수학의 다른 분야에 비하여 짧은 역사에도 불구하고 비약적인 발전을 거듭하고 있다. 그 이유는 순수 위상기하분야가 수학의 다른 분야에서 활발히 연구되어진 여러 가지 업적들을 이용하여 새로운 연구분야를 개척하였을 뿐만 아니라 위상기하의 연구 업적들이 비단 수학 분야만이 아니라 천체물리학, 전산학, 정보통신 분야와 분자생물학에 이르기까지 다양한 학문에 응용되고 수학의 다른 여러 분야에도 지대한 영향을 미치고 있기 때문이다. 위상기하는 학생들에게 기하학적인 감각과 공간 지각력을 길러주어서 공간적인 대상을 다루는 분야에 있어서는 그 대상을 빠른 시간 내에 분석하고 그 특성을 파악할 수 있는 능력을 배양해 준다. 또한 대부분의 수학 분야가

미시적인 관점에서 대상을 연구하는 반면 위상기하는 대상을 거시적인 관점에서 전체를 통찰하는 능력을 길러준다. 이러한 능력은 수학의 다른 분야에서 길러줄 수 없는 위상기하의 고유한 영역이며 현대사회에서 필요로 하는 인재들이 갖추어야 할 능력 중의 하나로 학생들은 위상기하를 필히 공부해야 한다고 본다.

B. 위상기하학의 역사적 개관

1. 위상기하학의 정의

Topology(위상기하학)는 그리스어의 topos(위치)와 logos(학문)를 결합시킨 것으로 위치를 다루는 학문이 위상기하학이다. 위상기하란 말을 처음으로 사용한 리스팅(J.B.Listing, 1806~1882)은 위상기하의 기초연구(Vorstudien Zur Topology1847)에서 위상기하를 '공간의 점・선・면 및 위치 등에 관하여 양이나 크기와는 상관없이 형상이나 위치 관계만을 나타내는 법칙을 연구하는 학문이다.'라고 정의하고 있다. 또한 1893년 클라인(F.Klein, 1849~1925)은 '에를랑겐 목록'을 발표하였는데, 그 중에서 '위상기하학은 위상사상에 대하여 불변인 도형의 성질을 연구하는 학문'으로서 위상기하학을 정의하였다. 이때는 위상을 기하학적 입장에서 다루었고 19세기 말과 20세기 초에는 해석적 측면에서 다루었다. 위상기하학을 위치와 형상에 관한 기하학이라고 풀이할 수 있는데 그 중 오일러(Euler, 1707~1783) 정리는 형상에 관한 것이며 곡선의 위치관계와 곡면의 구조 등을 다룬 가우스(Gauss, 1777~1855)의 연구 결과는 위치에 관한 것이라 할 수 있다.

위상(topology)은 길이나 크기의 개념이 아닌 형상의 성분들이 상호 위치에 의한 기하학적 성질을 다룬다. 또한 자르거나 찢거나 구멍을 내는 것과 같은

불연속변환을 다루는 것이 아니고 구부리고, 줄이고, 늘리고, 꼬는(비트는)것과 같은 연속변환을 다룬다. 오늘날 위상기하학은 기하학 뿐 아니라 대수학, 해석학 등과도 깊은 연관이 있어 이들 분야의 심오한 연구에 위상기하학은 아주 필수적이다. 이런 이유에서 위상기하학을 위상수학과 같은 뜻이라 볼 수 있다. 현재는 위상수학이란 말을 주로 사용하고 있으나 기하학적인 면을 강조하기위해 본 논문에서는 위상기하학이라 통칭하겠다.

19세기 중엽 전에는 위상이 독립된 단편 지식들의 모임이었는데 이중 다면체에 관한 연구는 대수적 위상을 연구하는데 좋은 서론이 될 수 있다. 뫼비우스(Möbius, 1790～1868)에 의하여 위상동형의 개념이 생각되기 시작하였는데 1863년 뫼비우스는 이웃한 점을 이웃한 점으로 옮기는 전단사함수가 존재할 때 두 도형 사이의 관계를 기술한 저서를 발표하였지만 점 사이의 인접관계를 보존하는 개념 (함수의 연속)은 1870년대까지는 연속의 엄밀한 정의로 공식화되지 못했다. 19세기 후반에 해석학과 집합론이 크게 발달하였고 이들은 R^n 에서 점집합위상에 대한 관심을 끌도록 하였다. 칸토르(Cantor, 1845～1918)는 집합론을 만들었고 점집합의 성질들을 극한과 폐포로 생각하게 되었으며 몇 년 후인 1914년에 하우스도르프(F.Hausdorff, 1868～1942)가 쓴 저서에서 점집합위상이 정의되어 나왔다.[1]

위상수학의 분야는 현재 대단히 광범위하다. 위상수학 또는 적어도 그 일부는 현대 수학의 대부분의 분야에 퍼져있으며 현대 물리학과도 깊은 관계를 맺고 있다. 그런데 위상수학은 비록 일부 개념은 오일러와 가우스까지 거슬러 올라가기도 하지만 실제 발전 역사는 19세기 후반에 뽀앙까레(H.Poincare, 1854～1912)등의 연구로부터 시작되어 이제 겨우 1세기밖에 되지 않는다. 뽀앙까레는 위상수학에 대한 초기의 공헌자 중 업적이 가장 지대하다. 1895년 <위치해석, Analysis situs>이라는 제목의 논문에서 'n차원 호몰로지 이론'을 소개했으며, 베티(Betti)군을 위상수학에 소개하였다.[6]

다음은 위상공간의 연구영역을 몇 가지로 구분한 것이다.

a. 일반위상수학*(general topology)*

이 분야는 1870년대 칸토르가 일반집합론을 창시함과 동시에 유클리드 공간내의 점집합을 고찰하여 극한개념을 도입하면서 시작되었다. 유클리드 공간내의 점집합에는 거리에 의하여 위상이 주어진다. 이것은 연구의 대상을 그때까지의 다면체나 곡면에서 벗어나 임의의 점집합까지 확대했다는 뜻에서 획기적인 발전이었다. 이로서 해석학의 기본이 되는 집적점, 개집합, 폐집합, 근방 등의 개념을 얻고 20세기 초 프레세(M.Frechet, 1878～1973)와 하우스도르프에 의하여 위 개념들이 추상화되면서 추상적인 일반위상공간이 정의되었다. 즉 가장 일반적인 위상공간의 성질을 그 공간에 주어진 위상에 의하여 규명하는 학문이라고 정의한 것이다. 이것을 집합론적 위상수학(point set topology)이라고도 한다. 이 때 칸토르의 이론은 르베그에 의한 측도론이나 보렐(Borel, 1871～1956)에 의한 보렐집합 연구, 프레세에 의한 추상공간, 또는 페아노(Peano, 1858～1932)에 의한 페아노 곡선의 연구 등에 있어서 큰 구실을 하였다.

b. 조립적 위상수학*(combinatorial topology)*

프랑스의 앙리 뽀앙까레는 오일러 공식의 증명에 있어서 대상을 다면체로 하고 그것을 단체분할에 의하여 얻은 단체복체를 사용하여 위상적 성질을 구하였으며 여기서 조립적 위상수학이 시작되었다. 조립적 위상수학의 가장 큰 성과는 다음과 같다.

* 뽀앙까레의 쌍대정리
* 호프의 사상도 이론과 불변량
* 리프슈쯔의 부동점 정리
* 알렉산더의 쌍대정리

위 이론들은 모두 호모로지 이론을 사용하고 있으며 이렇게 해서 기하도형에 대수계를 대응시켜 도형의 성질규명을 대수적 방법에 의하여 처리하는 수

학적기교가 시작되었다. 또 여기서 탄생한 수학이론에는 카테고리(category)와 휭터(functor)이론이 있다.

1930년대에 와서 조립적 위상수학은 2가지 방향으로 발전하게 되었다. 그 하나가 다면체의 조립적 구조의 선형사상에 의한 연구이며 이 방향을 오늘날 우리는 조립적 위상수학이라 부른다. 다른 하나의 발전 방향으로는 호몰로지론에 의하여 영향을 받은 코호몰로지링을 들 수 있다.

c. 대수적 위상수학*(Algebraic topology)*

프랑스의 수학자 뽀앙까레가 1895년부터 1901년 사이에 발표한 일련의 논문들에서 발표 주창되었다. 대수적 위상수학은 점집합론적 위상수학의 한 가지로서 개발된 것이 아니다. 뽀앙까레의 주장은 다른 수학자들의 연구와는 무관한 것으로 독창적인 것이다. 더구나 집합론적 위상수학은 연속함수를 폭넓고 다양하게 다루려는 일반적이고 추상적인 이론으로서 개발되었는데 비해 대수적 위상수학은 유클리드 공간에서의 기하학, path, 표면, 등을 포함하는 특수한 기하학적 문제들을 해결하려는 것에서부터 동기가 유발되었다. 점집합론적 위상수학과는 달리 대수적 위상수학은 칸토르의 일반집합론의 부산물이 아니다.

대수적 위상수학을 다루기 위하여 대수계를 대응시키는 방법으로 호몰로지론, 코호몰로지론, 호모토피론, K-이론 등이 있으나 대표적인 것이 호몰로지론과 호모토피론이다.

d. 미분위상수학*(differential topology)*

대수적 위상수학의 발달에 따라 미적분학 등의 해석적 방법으로 위상을 연구하는 분야이다. C^r 다양체의 C^r 동위상사상에 의하여 불변인 성질을 위상수학의 방법으로 추구하는 학문이라고도 할 수 있는 미분 위상수학은 1936년에 C^r 다양체가 정의되고 1956년 밀르너(Milnor)는 “7차원 구면과 위상동형

이나 C^r 위상동형이 아닌 C^r 다양체가 존재한다."는 것을 증명하였다.[1]

2. 위상수학의 역사적 배경

위상수학의 초기 관심은 다면체의 면, 변, 꼭지점의 수 사이의 관계를 규명하는데 있었다. 1620년경 이미 데카르트(R.Descartes, 1596～1650)에 의하여 우리가 알고 있는 오일러의 공식 $v-e+f=2$ 는 발견되었으나 그의 제자 라이프니쯔(Leibniz, 1646～1716)가 데카르트의 논문원본을 가지고 있었지만 출판하지 못했고 1860년이 되어 이 논문이 세상에 공개되었다. 그사이 오일러는 독자적으로 이 공식을 알아냈고 1752년 이 공식을 증명하였다. 이것이 이 공식을 오일러의 정리로 보통 언급하는 이유이다. 라이프니쯔의 논문 제2권에 의하면 아르키메데스(Archimedes, 287～212 B.C)가 오일러의 공식을 알고 있었을지도 모른다는 것을 추측하게 한다.

오일러 공식의 증명은 여러 가지 방법이 있다. 데카르트 자신은 다면체의 면들의 이웃한 변 사이의 각들의 합을 생각해서 공식을 찾아냈다. 이는 평면에서 다각형의 경우를 다면체로 일반화하기 위하여 노력했던 것 같다. 구면을 직선이나 평면으로 나누지 않고 임의로 나누어도 오일러공식은 성립한다. 이것은 구와 도우넛의 표면을 구분하는 구체적 방법을 제시한 것이다. 실제로 데카르트나 오일러는 그런 관점으로 공식을 보지 않았기에 오일러 이후 100여 년 뒤에야 이 공식의 위상적 중요성이 인식되었다.

오일러는 1752년경 다면체에 대하여 자세한 연구를 시작했고 그들의 분류를 시작하였다. 그러나 바로 다른 수학자들의 관심을 얻지 못했으나 수 년 뒤부터 여러 수학자들의 관심을 얻게 되었다. 오일러의 다면체 분류는 점차 실현되었고 다른 수학자들에 의하여 다른 방법들이 개발되었다. 그러는 사이에 오일러의 정리는 단순볼록다면체가 아닌 다른 곡면에 일반화되었다.

18세기부터 19세기의 유클리드 기하학과 비유클리드 기하학은 도형의 계량

적 성질보다는 도형의 위치나 점의 연결상태, 그리고 내부와 외부의 관계 등에 중점을 두었다. 그 후 가우스에 의해 위상에 관한 것들이 활발하게 연구되었다. 1847년 가우스의 제자였던 리스팅이 위상기하란 명칭을 그의 저서에서 처음 사용하면서 그 후 레프셔츠(S.Lefschetz, 1884～1972)에 의해 topology란 영어로 사용되었다. 특히 가우스의 제자 중 독일의 수학자 리만(B.Riemann, 1826～1866)은 리만곡면의 개념을 도입하여 다양체와 리만면의 개념을 확립하고 위상기하의 탄생을 촉진하는 원동력이 되었다.

이 밖에 19세기 중반 거쓰리(F.Guthrie)는 4색 문제를 제기하였으며, 뫼비우스와 리스팅이 독자적으로 뫼비우스 띠(one-sided surface)를 발견하였고 이것은 위상적 불변성인 방향성(orientability)을 제시하게 했다. 1876년 클라인(F.Klien)에 의하여 방향성이 곡면의 고유성질이라는 것이 처음 자세히 조사되는 등 위상기하학에 큰 업적을 남기게 되었다.

뫼비우스와 리만 그리고 뽀앙까레가 강조했던 '기본적 부분들이 유한 개 모여 만들어진 기하학적 도형'의 개념은 칸토르가 임의의 사물의 집합은 어떤 의미에서 위상공간을 구성할 수 있다고 확신하는데 큰 도움을 주었다. 이후 집합론적 위상기하학과 대수적 위상기하학은 위상기하학의 주류를 이루며 발전해 오고 있다.

Ⅱ. 위상기하의 기본 개념 고찰

A. 거 리

중등수학에서 다루는 거리개념은 수직선(1차원)상에서와 평면상(2차원)상에서의 거리 및 공간상(3차원)상에서의 거리이다. 우선 수직선위에서 두 점 사이의 거리는 그 두 점 A와 B를 끝으로 하는 선분의 길이(기호$\overline{AB}$)로, 그 좌표가 각각 $A(a)$과 $B(b)$ 일 때 $\overline{AB}=|a-b|=\sqrt{(a-b)^2}$으로 나타내어지는 것이고 평면 위에서 두 점 사이의 거리는 좌표평면 위의 점이 실수의 순서쌍과 일대일 대응관계가 있는 것과 사분면의 개념을 인식하고 피타고라스의 정리와 수직선에서 두 점 사이의 거리를 이용하여, 그 좌표가 각각 $A(a_1, a_2)$과 $B(b_1, b_2)$ 일 때 두 점 A와 B사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$으로 나타내어진다. 또한 공간상에서의 거리는 좌표공간을 이해하여 공간에서의 점의 위치를 공간좌표로 나타낼 수 있고 공간좌표에서 두 점 사이의 거리는 직육면체의 대각선의 길이를 구하는 과정과 평면좌표에서 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하면 각각 $A(a_1, a_2, a_3)$과 $B(b_1, b_2, b_3)$의 두 점 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}$로 나타내어진다.[9] 이상이 중등수학에서 다루는 내용이지만 우리는 유추과정을 통하여 n차원 공간상에 있는 각각 $A(a_1, a_2, ..., a_n)$과 $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$의 두 점 사이의 거리를 $\overline{AB}=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+...+(a_n-b_n)^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2}$와 같이 나타낼 수 있게 된다. 이것은 n차원 공간상에서의 보통거리이다. 이를 특히 유클리드 거리(Euclidean metric)라고도 한다.

유클리드 공간에서의 보통 거리 개념이 갖고 있는 기본성질을 추상화하여

집합상에서 보다 일반적으로 거리개념을 도입할 수 있다.

[정의 2-1] X를 공집합이 아닌 집합이라 하자. 모든 $a, b, c \in X$ 에 대하여 다음 [M1]~[M4]조건을 만족하는 $X \times X$상, 즉 X에 속하는 원소의 순서쌍에서, 정의되는 실수치함수 d를 X상의 거리(metric)또는 거리함수(distance function)라고 한다.

[M1] $d(a, b) \geq 0$, $d(a, a) = 0$

[M2] $d(a, b) = d(b, a)$ (대칭률 symmetry)

[M3] $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ (삼각부등식 triangle inepuality)

[M4] $a \neq b$ 이면 $d(a, b) > 0$

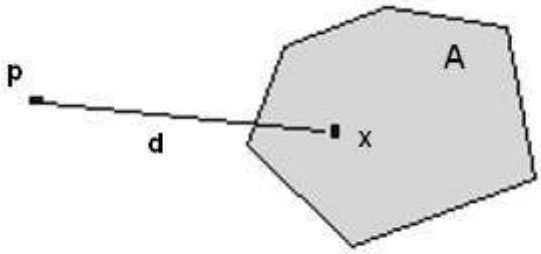
실수치 $d(a, b)$를 a에서 b까지의 거리(distance)라고 한다.[4]

중등수학에서 다룬 거리 개념인 보통거리는 [M1]~[M4]을 만족한다. 일반적으로 일상생활에서 말하는 거리개념이 아니라 수학에서 말하는 거리개념은 가장 짧은 거리를 말하는 것으로 점과 집합 사이의 거리나 집합과 집합 사이의 거리 또한 이를 이용해서 정의할 수 있다.

[정의 2-2] d가 집합 X상의 거리일 때 한 점 $p \in X$와 공집합이 아닌 부분집합 $A \subset X$사이의 거리(distance)는 다음과 같이 정의한다.

$$d(p, A) = inf\ \{d(p, x) \mid x \in A\}$$

즉 p 에서 A의 각 점까지의 거리의 집합의 하한이다.

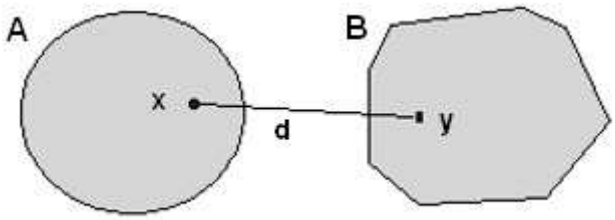


[그림 Ⅱ - 1] 점과 집합사이의 거리

또 공집합이 아닌 두 부분집합 $A, B \subset X$ 사이의 거리는

$$d(A, B) = inf\{d(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$

에 의하여 정의한다.



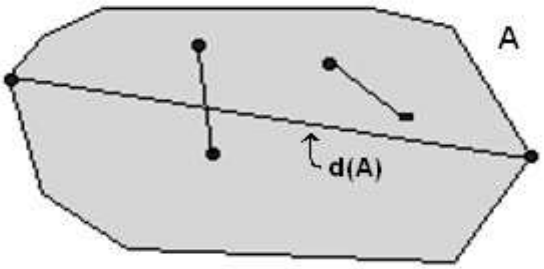
[그림 Ⅱ - 2] 집합과 집합사이의 거리

공집합이 아닌 부분집합 $A \subset X$의 지름(diameter)은

$$d(A) = sup\{d(x, x') \mid x,\ x' \in A\}$$

으로 정의한다. 즉 $d(A)$는 A안의 점들 사이의 거리의 집합의 상한이다.

만일 A의 지름이 유한이면 ($d(A) < \infty$) A는 유계(bounded)라 하고 그렇지 않으면 ($d(A) = \infty$) A는 비유계(unbounded)라고 한다.



[그림 Ⅱ - 3] 집합의 지름

확장된 실수계에서 $A \subset R$ 이고 $A \neq \varnothing$이며 A의 상계가 없을 때, 즉 A의 상한이 없을 때 $sup\,A = \infty$ 라고 한다. 마찬가지로 $A \neq \varnothing$이고 하계가 없을 때, 즉 A의 하한이 없을 때 $inf A = -\infty$라고 한다. 이때 $A = \varnothing$이면 $\varnothing = R^c$ 이므로 $sup\varnothing = -\infty$, $inf\varnothing = \infty$이라고 한다. 그러므로

$d(\varnothing) = sup\{d(a,b) \mid a, b \in \varnothing\} = sup\varnothing = -\infty$,

$d(p, \varnothing) = inf\{d(p,a) \mid a \in \varnothing\} = inf\,\varnothing = \infty$,

$d(A, \varnothing) = d(\varnothing, A) = inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in \varnothing\} = inf\,\varnothing = \infty$

으로 정의한다.

B. 위상공간

1. 실수전체의 집합 R과 평면 R^2의 위상

[정의 2-3] A를 실수 집합이라 하자. 점 $p \in A$를 포함하고 A에 포함되는 어떤 개구간 S_p가 존재할 때, 즉

$$p \in S_p \subset A$$

일 때 p를 A의 내점(interior point)이라 하고 집합 A의 모든 점이 내점일 때 A를 개집합(open set)이라 한다.

위의 정의에 따르면 임의의 개구간 (a, b)과 실직선 R자신은 개집합임을 알 수 있고, 공집합 $\varnothing$는 내점이 아닌 점이 하나도 없기 때문에 개집합임을 알 수 있다.

중심을 한 점 $p(a, b)$에 두고 반지름이 $\delta > 0$ 인 원의 내부의 점의 집합을 평면 R^2의 개원판(open disc)이라한다.

즉 중심이 $p(a, b)$에 있고 반지름이 $\delta > 0$ 인 개원판 D는

$$D = \{(x, y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2\} = \{q \mid q \in R^2,\ d(p, q) < \delta\}$$

이다. 여기서 $d(p, q)$ 는 두 점 $p(a_1, a_2)$, $q(b_1, b_2)$ 사이의 보통의 거리 즉

$$d(p, q) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

을 뜻한다.

[정의 2-4] A를 R^2의 부분집합이라 하자. 점 $p \in A$를 포함하고 A에 포함되는 어떤 개원판 D_p가 존재할 때, 즉

$$p \in D_p \subset A$$

일 때 p를 A의 내점이라 하고 집합 A의 모든 점이 내점일 때 A를 개집합이라 한다.

위의 정의에 따르면 임의의 개원판, 전체평면 R^2, 공집합 $\varnothing$는 개집합임을 알 수 있다.

R과 R^2에 있어서 임의개의 개부분집합의 합집합은 개집합이고 유한개의 개부분집합의 공통집합은 개집합이다.[4]

이 성질을 R^2에 있어서 살펴보면 다음과 같다.

[정리 2-1] R^2의 임의개의 부분집합의 합집합은 개집합이다.

(증명) $\mathscr{A}$ 를 R^2의 개부분집합족, $H = \cup\{G \mid G \in \mathscr{A}\}$이라 하고 $p \in H$이라 하자. 이 정리는 p가 H의 내점, 즉 p를 포함하고 H에 포함되는 개원판 D_p가 존재함을 밝히자.

$p \in H = \cup\{G \mid G \in \mathscr{A}\}$이므로

$$p \in G_0 \text{로 되는 } G_0 \in \mathscr{A} \text{ 가 존재한다.}$$

그런데 G_0는 개집합이므로 p를 포함하는 개원판 D_p가 존재해서

$$p \in D_p \subset H$$

을 만족한다. G_0는 $H = \cup\{G \mid G \in \mathscr{A}\}$의 부분집합인 까닭에 D_p는 또한 H의 부분집합이다. 따라서 H는 개집합이다.

[정리 2-2] R^2의 임의의 유한개의 개부분집합의 공통집합은 개집합이다.

(증명) 이 정리를 R^2의 두 개부분집합의 경우에 대해서 증명하면 이 정리는 귀납법에 의하여 성립된다.

G와 H를 R^2의 개부분집합, $p \in G \cap H$ 이라 하자. 따라서 $p \in G$이고 $p \in H$ 이므로 개원판 D_1과 D_2가 존재해서

$$p \in D_1 \subset G \text{ 이고 } p \in D_2 \subset H$$

를 만족한다. 이 경우 $p \in D_1 \cap D_2 \subset G \cap H$ 이고, 임의의 두 개원판의 공통부분은 개집합이므로

$$p \in D \subset D_1 \cap D_2 \subset G \cap H$$

를 만족하는 개원판 D가 존재한다. 따라서 p는 $G \cap H$ 의 내점이고, 따라서 $G \cap H$는 개집합이다.

이러한 성질들을 바탕으로 하여 일반집합에 어떤 구조를 주어 위상공간을 만들게 된다.

[정의 2-5] X를 공집합이 아닌 집합이라 하자. X의 부분족 $\mathfrak{I}$가 다음 공리를 만족할 때 $\mathfrak{I}$를 X상의 위상(topology) 이라한다.

[O1] X와 $\varnothing$은 $\mathfrak{I}$에 속한다.

[O2] $\mathfrak{I}$에 속하는 임의 개수의 집합의 합집합은 $\mathfrak{I}$에 속한다.

[O3] $\mathfrak{I}$에 속하는 임의의 두 집합의 공통집합은 $\mathfrak{I}$에 속한다.

$\mathfrak{I}$의 원소를 $\mathfrak{I}$-개집합($\mathfrak{I}$-open sets), 또는 간단히 개집합(open sets)이라 하며 X와 $\mathfrak{I}$, 즉 쌍$(X, \mathfrak{I})$를 위상공간(topological space)이라 한다.

'가깝다', '멀다'라고 하는 의미는 일반적으로 어떤 구체물을 기준으로 한 대상에 의해 표현될 수 없으며 꼭 두 대상 A, B가 존재하여야 그 구체물에 대하여 'A가 B보다 멀다'혹은 'A가 B보다 가깝다'라는 표현이 가능하다. 이러한 '가깝다', '멀다'라는 개념을 거리의 개념에서 보다 확장하여 생각해 볼 수 있는데 예를 들어 사람과 사람 사이에 '가깝다', '멀다'라는 개념은 가족인지 또는 친인척관계에 있는지, 같은 학교출신인지, 같은 동네 혹은 이웃집에 살고 있는지, 같은 회사에서 근무하거나 거래처에 근무하는지 등등의 여러 가지 요소를 모두 종합하여 공통요소가 있을 때 '가깝다', 공통요소가 없을 때 '멀다'라는 개념을 사용할 수도 있다. 이렇게 '가깝다', '멀다'라고 하는 의미가 성립할 수 있는 보다 추상화된 근접성의 개념이 위상이고 한 집합상에 위상을 도입하여 위상공간을 만들게 된다.

위의 [정의 2-5]에서 정의된 $\mathfrak{I}$에 대하여 어떤 집합 A가 $\mathfrak{I}$에 속하면 '가깝다'라고 하고 $\mathfrak{I}$에 속하지 않으면 '멀다'라고 하여 '가깝다', '멀다'라고 하는 근접성의 의미가 추상화된다.

다시 말하자면 위상 $\mathfrak{I}$에 대하여 어떤 집합이 위상 $\mathfrak{I}$의 원소이면 '개집합이다' 그리고 $\mathfrak{I}$의 원소가 아니면 '개집합이 아니다'라고 할 수 있고 그것을 '가까이 있다' 또는 '가까이 있지 않다'라고 할 수 있는 것이다. (이 개념은 뒤에

연속을 이해하는데 바탕이 된다.)

[정의 2-6] 임의의 집합 X에 대하여 X의 모든 부분집합들의 모임 $p(X)$는 X의 한 위상이 되는데 이 위상을 특히 이산위상(discrete topology)이라 하고 $\mathscr{D}$로 표시하며 $(X, \mathscr{D})$를 이산위상공간(discrete topological space) 또는 이산공간이라 한다. 그리고 X자신과 $\varnothing$만으로 구성된 위상을 비이산위상(indiscrete topology)이라 하고 I로 표시하며 (X, I)를 비이산위상공간(indiscrete topological space) 또는 비이산공간이라 한다.

비이산위상의 경우 밀착위상이라고도 부르는데 이는 사람 사이의 '가깝다, 멀다'개념으로 생각한다면 이 공간에 사는 사람들은 모두 '가깝다'라고 할 수 있다. 왜냐하면 어떤 두 원소를 잡더라도 그 두 원소를 각각 포함하는 개집합은 X뿐이므로 공통 될 수밖에 없기 때문이다.

C. 연속성

연속이란 개념은 본래 곡선에 대하여 존재했던 것이고, 곡선이 끊기지 않고 이어져 있다는 직관적인 개념에서 발생한 것이다. 그러나 이것을 함수의 연속의 정의로 나타내는 것은 쉽지 않았고 현재 고등학교에서는 코시(Cauchy)에 의한 것으로

$$x = a \text{ 에서 함수 } f(x) \text{ 가 연속} \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

와 같이 정의하고 있다. 이것은 학생들에게 다음과 같이 나누어 이해시킬 수 있다.

㉠ $f(a)$가 존재한다. ㉡ $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다. ㉢ $\lim_{x \to a} f(x)$와 $f(a)$가 일

치한다.[9]

연속함수의 일반적인 $\epsilon-\delta$ 정의를 다음과 같이 기술할 수 있다.

[정의 2-7] 함수 $f: R \to R$ 는 모든 $\epsilon > 0$ 에 대해서 $\delta > 0$ 가 존재해서

$$|x - x_0| < \delta \text{ 이면 } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

일 때 점 x_0 에서 연속(continuous)이라 한다. 함수 f가 모든 점에서 연속일 때 연속함수(continuous function)라 한다.

$|x - x_0| < \delta$ 란 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, 또는 같은 뜻으로 x 가 개구간 $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ 에 속함을 뜻한다. 같은 방법으로 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 는 $f(x)$ 가 $(f(x_0) - \epsilon,\ f(x_0) + \epsilon)$ 에 속함을 뜻한다. 따라서 다음 명제,

$$|x - x_0| < \delta \text{ 이면 } f(x) \in |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

와 명제,

$$x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \text{ 이면 } (f(x_0) - \epsilon,\ f(x_0) + \epsilon)$$

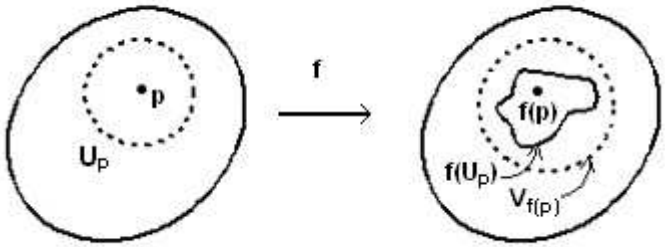
와 같고 이것은 또한 명제,

$$f((x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)) \subset (f(x_0) - \epsilon,\ f(x_0) + \epsilon)$$

와 같다. 이 사실로부터 앞 정의는 다음과 같이 바꾸어 말할 수 있다.

[정의 2-8] 함수 $f: R \to R$ 가 점 $p \in R$ 에서 연속이란, $f(p)$ 를 포함하는 임의의 개집합 $V_{f(p)}$ 에 대해서 $f(U_p) \subset V_{f(p)}$ 를 만족하는 p 를 포함하는 개집합 U_p 가 존재하는 것이다. 함수 f 가 모든 점에서 연속일 때 f 는 연속함수라 한다.

다음 [그림 Ⅱ - 4]의 벤 도식을 보면 이 정의를 이해하기 쉽다.



[그림 Ⅱ - 4] 연속함수의 벤 도식

[정리 2-3] 함수 $f: R^2 \to R^2$ 가 연속이기 위한 필요충분조건은 모든 개집합 V 의 역상이 개집합이다.

(증명) $f: R^2 \to R^2$ 은 연속이고 V를 R^2의 개부분집합이라 하면, $f^{-1}(V)$는 또한 개집합임을 밝히고자 한다.

$p \in f^{-1}(V)$ 라고 하면 $f(p) \in V$ 이다. 연속의 정의에 의하여 p 를 포함하는 개집합 U_p 가 존재해서 $f(U_p) \subset V$ 이다. 따라서

$$U_p \subset f^{-1}(f(U_p)) \subset f^{-1}(V)$$

따라서 모든 $p \in f^{-1}(V)$ 에 대해서 개집합 U_p 가 존재해서

$$p \in U_p \subset f^{-1}(V)$$

를 만족함을 밝혔다. 따라서

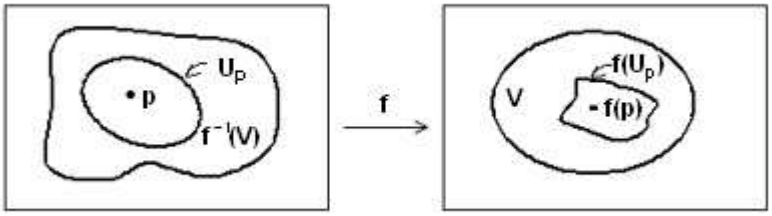
$$f^{-1}(V) = \cup \{U_p \mid p \in f^{-1}(V)\}$$

이므로 $f^{-1}(V)$ 는 개집합의 합집합이고, 따라서 그 자신이 개집합이다.

역으로 모든 개집합의 역상이 개집합이라고 가정하고서 f 가 임의의 점 $p \in R^2$ 에서 연속임을 밝히고자 한다.

V를 $f(p)$ 를 포함하는 개집합, 즉 $f(p) \in V$ 라 하면 $f^{-1}(V)$ 는 p 를 포함하는 개집합이고 성질 $f(f^{-1}(V)) \subset V$ 를 만족한다. 따라서 f 는 p 에서 연속

이다.



[그림 Ⅱ - 5] 연속함수 역상의 벤 도식

위상공간상에서의 일반적인 연속사상의 개념은 실직선상에서 실수치를 갖는 연속함수의 기본성질을 추상화하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

[정의 2-9] $(X, \Im)$와 $(Y, \Im^*)$를 위상공간이라 하자. X에서 Y로의 함수 f가 Y의 모든 $\Im^*$-개부분집합 H의 역상 $f^{-1}[H]$가 X의 $\Im$-개집합일 때, 즉

$$H \in \Im^* \text{ 이면 } f^{-1}[H] \in \Im$$

일 때, 함수f를 $\Im$와 $\Im^*$에 관하여 연속 또는 간단히 연속이라 한다.

다시 말하자면 연속은 개집합의 역상이 개집합인 것이고 앞의 위상에서 정의한 개집합의 개념과 접목시켜 생각해 본다면 연속은 가까운 것의 역상이 다시 가까이에 있는 것이 되어 그것들이 서로 붙어있는 모습 즉 연속의 직관적인 모습인 끊기지 않고 이어져 있는 것으로 표현되는 것이다.

D. 위상동형

위상공간$(X, \Im)$란 앞에서 정의한 바와 같이 집합 X와 세 가지 공리를 만

족하는 X의 지정된 부분집합족 $\Im$이다. 이와 같은 임의의 두 공간 $(X, \Im)$와 $(Y, \Im^*)$사이에는 여러 가지 함수 $f: X \to Y$가 존재한다. 공간$(X, \Im)$와 $(Y, \Im^*)$의 어떤 구조의 양상을 보존하는 것이 연속함수인 까닭에 임의의 함수를 논하기보다 오히려 연속사상을 논하기로 한다.

이제 어떤 전단사사상 $f: X \to Y$가 존재한다고 가정하자. 이 경우 f는 X의 멱집합에서 Y의 멱집합으로의 전단사 $f: P(X) \to P(Y)$를 유도한다. 만일에 이와 같은 동반함수에 의하여 $\Im$도 $\Im^*$의 위로 사상할 때, 즉 X의 개집합과 Y의 개집합 사이에 1대 1의 대응이 존재할 때 공간$(X, \Im)$와 $(Y, \Im^*)$는 위상적 관점에서 동일하다.

[정의 2-10] 두 위상공간 X와 Y에 대하여 f와 f^{-1}가 연속인 전단사 $f: X \to Y$가 존재하면 함수 f를 위상동형사상(homeomorphism)이라 한다. X와 Y사이에 위상동형사상이 존재할 때 X와 Y를 위상동형이라 하고 $X \cong Y$로 나타낸다. 그리고 개집합의 상이 개집합인 함수 $f: X \to Y$를 개사상(open function)이라 한다.

만일에 f가 개사상이고 연속이면 함수 f는 양연속(bicontinuons) 또는 위상적(topological)이라 한다. 따라서 $f: X \to Y$는 f가 양연속이고 전단사일 때 동형사상이다.

$f: X \to Y$를 위상동형사상이라 하자. $f: X \to Y$는 전단사이고 f에 의하여 유도된 집합함수

$$\begin{aligned} f : P(X) &\to P(Y) \\ (A &\mapsto f(A)) \end{aligned}$$

도 전단사가 된다. 따라서 X상에서 개집합들과 집합연산들에 의하여 표현되는 성질은 f에 의하여 Y상에 그대로 옮겨진다. 이 성질을 위상적 불변성 혹은 위상적 성질이라 한다. 보다 일반적인 위상적 불변성에 관한 정의는 다

음과 같다.

[정의 2-11] 한 위상공간 X에서 성립하는 성질 P가 X와 위상동형인 Y에서도 성립할 때 그 성질 P를 위상적 불변성 (topological invariant) 혹은 위상적 성질 (topological property)이라한다.

위상공간 상에서 한 성질 P가 성립하고 $f: X \to Y$가 위상동형사상일 때 Y에서도 성질 P가 성립한다는 것이 증명되면 사상 f는 성질 P를 보존한다고 말한다.

즉 위상동형이라는 동치관계에 의한 한 동치류에 속하는 각 위상공간들이 갖는 공통성질을 위상적 성질이라 할 수 있다. 위상수학은 이러한 위상적 성질을 연구하는 분야이다. 위상적성질의 예로는 콤팩트성(compactness)과 연결성(connectedness), 한붓그리기의 가능성, 오일러수, 점의 차수 등이 있다.

기존의 유클리드 기하학에서는 크기와 모양이 같아야만 같은 도형으로 취급하였다. 그러나 위상 기하학에서는 도형의 크기나 모양이 변하더라도 도형의 연결상태만 같으면 같은 도형으로 간주한다. 예를 들어, 삼각형과 원과 같은 단순한 그래프는 유클리드 기하학에서는 다른 도형이지만, 위상 기하학에서는 같은 도형이 된다. 왜냐하면 삼각형은 자르거나 이어 붙이지 않고 적당히 구부리면 원으로 만들 수 있기 때문이다. 즉 '연결상태가 같다'라는 것은 자유자재로 줄이거나 늘이거나 구부리거나 할 수 있는 고무판으로 모양을 만들 수 있다는 것과 같다.

이러한 연결상태가 같은 도형은 선이나 면에서뿐만 아니라 입체도형에서도 논의 할 수 있다.

연결공간이란 직관적으로 분리된 두개의 조각으로 이루어져 있지 않은 공간을 의미한다고 할 수 있고 연결성 개념은 실직선상에서 구간들이 갖는 기본 성질을 추상화하여 얻어진 것으로 비연결공간을 먼저 정의하고 이를 이용하여 연결공간을 정의하면 다음과 같다.

[정의 2-12] 위상공간 X가 공집합이 아니면서 서로소인 두개의 개집합들의 합

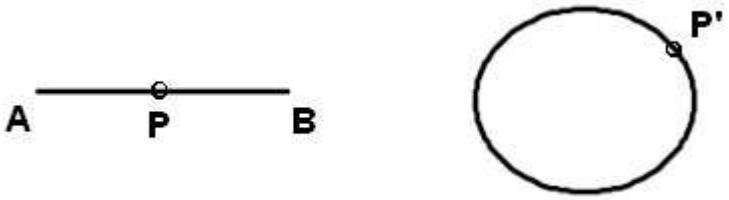
집합일 때 X를 비연결공간 (disconnected space) 이라 한다. 그리고 위상공간 X가 비연결공간이 아닌 경우 연결공간 (connected space) 이라 한다.

위상동형인 두 공간이 연결상태가 같다는 것을 알 수 있다.

예를 들어 아래 [그림 Ⅱ - 6]에서는 선분과 곡선은 위상적으로 같은 도형이라 할 수 있지만

[그림 Ⅱ - 6] 선분과 곡선의 위상적 비교

[그림Ⅱ-7]에서는 선분과 원은 위상적으로 같은 도형이라 할 수 없다.

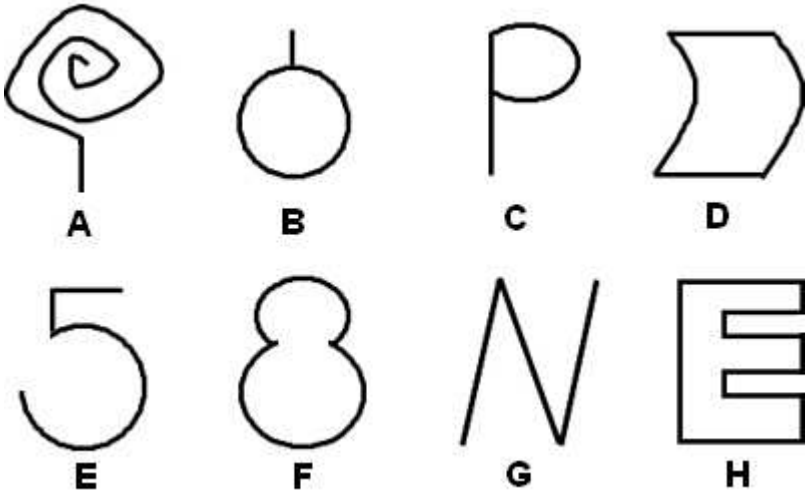


[그림 Ⅱ - 7] 선분과 원의 위상적 비교

왜냐하면 선분 AB의 끝점이 아닌 임의의 점 P를 잡고 원에서는 임의의 P'를 잡아 각 점 P와 P'를 제거하여 보면 선분 AB는 서로소인 두 개의 집합으로 분리되지만 원에서는 연결상태가 유지되므로 위상적 성질인 연결성에의해 위상적으로 동형이라 할 수 없다.

좀 더 여러 가지 예를 들면 다음과 같다.

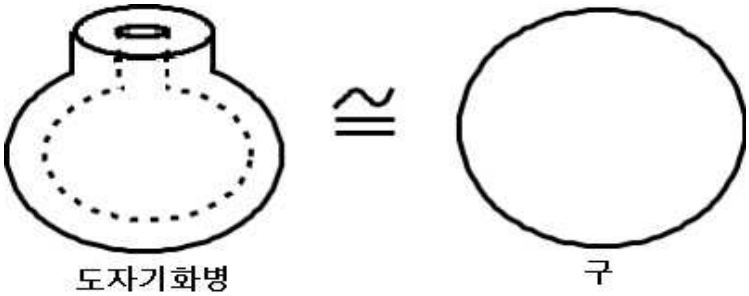
■ 평면에서의 위상동형



[그림 Ⅱ - 8] 평면에서의 위상동형

위의 그림에서 위상동형인 것을 찾아보면 A≅E≅G 와 B≅C 그리고 D≅F≅H이다.

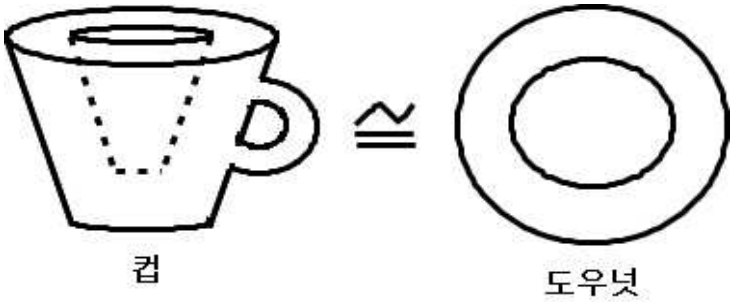
■ 입체에서의 위상동형



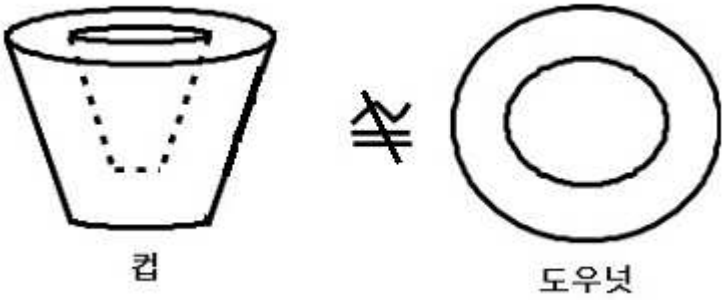
[그림 Ⅱ - 9] 입체에서의 위상동형

위의 [그림 Ⅱ - 9]에서 도자기화병과 구는 늘이거나 줄였을 때 연결상태가 같다고 볼 수 있고 [그림 Ⅱ - 10]에서 컵과 도우넛은 연결상태를 봤을 때 컵은 손잡이 부분이, 도우넛은 가운데 부분이 한번 뚫려있는 상태로 연결상태가 같다는 것을 알 수 있다. 이와 비교하여 손잡이 부분이 없는 [그림 Ⅱ - 11]에서는

컵이 하나로 연결되어 뚫린 부분이 없기 때문에 도우넛과 연결상태가 다르다고 볼 수 있다.



[그림 Ⅱ - 10] 입체에서의 위상동형



[그림 Ⅱ - 11] 입체에서의 위상동형이 아닌 예

위상동형은 실생활에도 이용된다. 그 중 대표적인 것으로 지하철 노선도를 들 수 있다. 지하철 노선 안내도는 실제의 지도 위에 나타낸 지하철 노선도와 비교하면 상당한 차이가 있다. 전체 모양도 다를 뿐 아니라, 역과 역 사이의 거리도 다르고 방위도 다르다. 그러나 역들의 순서나 각각의 노선이 교차하는 환승역 등은 분명히 같다. 즉, 지하철 노선 안내도와 실제 지도 위에서의 지하철 노선도는 연결 상태가 같은 도형이다. 자유자재로 늘이거나 줄일 수 있는 고무판위에 지하철 노선이 표시된 실제의 지도가 그려있다면, 이것을 상하좌우로 적당히 늘이거나 줄여서 간단히 도식화된 지하철 노선 안내도

를 만들 수 있다. 이렇게 만들어진 노선 안내도는 실제의 지도보다 모양이 간단하고 알아보기에 편리하므로 훨씬 유용하여 많이 사용되고 있다.

[그림 Ⅱ - 12] 지하철 노선도

Ⅲ. 중등학교 수학에서의 위상기하

A. 현행 중등 교육과정의 분석

6차 교육과정에서는 중학교 1학년 과정의 '도형의 관찰'단원에서 오일러 정리, 한 붓 그리기를 소개함으로써 위상에 대하여 학생들이 좀 더 쉽게 접근할 수 있는 기회를 제공했었다. 그러나 7차 교육과정으로 개정되면서 '도형의 관찰'단원은 삭제되고 오일러 정리는 심화과정에서 '다면체에서 꼭지점의 수, 모서리의 수, 면의 수 사이의 관계를 알아본다.'[10]라고 개정되었다. 대신에 중등학교에 있어서 위상기하 분야는 고등학교 수학에서 이산수학으로 일부 대체되었다. 6차 교육과정까지의 한 붓 그리기와 오일러 정리는 위상수학에 대한 기본 개념을 이해하여 그것을 바탕으로 연속성과 비연속성의 의미를 파악하고, 더 나아가 우리가 주위에서 겪는 여러 가지 현상을 수학적으로 이해하는데 도움이 되도록 했다. 그러나 7차 교육과정에서 학습하고 있는 오일러 정리와 한 붓 그리기는 이들 자체를 학습 한다기보다는 실세계의 문제를 해결하는데 이산적인 방법을 효과적으로 적용하고 수학적인 탐구력과 응용력을 기르는데 필요한 일부분으로써 학습되고 있다. 과거 6차 교육과정 중의 '도형의 관찰'이란 한 단원으로서 오일러 정리와 한 붓 그리기를 학습 했을 때 대다수의 학생들은 이들 내용에 대한 구체적인 이해를 하는데 많은 시간이 필요했다. 실제로 이를 학습한 학생들은 단지 한 붓 그리기가 가능한 도형을 분류하는 방법이나 오일러 정리의 숫자적 식의 나열을 하는 학생들이 거의 대부분을 차지하게 된다. 이토록 학생들에게 내용의 기본적 개념 이해조차 힘들었던 이 부분을 7차 교육과정은 7-나 단계에서 오일러 정리를 심화과정으로 다루도록 권장하면서 다수의 7-나 교과서에서는 탐구활동 부분으로 다루어지고 있으며 다면체를 관찰하고 교사의 안내에 따라 표의 빈칸을 채우면서 오일러의 공식을 암기하는 것이 아니라 직관적으로 이해하도록 돕고 있

다. 그리고 고등학교 이산수학에서 한 붓 그리기가 그래프 이론에 포함되어 있으며 그래프 이론이 많은 문제를 표현할 수 있는 수학적 모형임을 인식시키고 실생활의 여러 가지 상황을 그래프로 간결하게 표현하고 처리할 수 있도록 하는데 지도의 중점을 두고 있다.

그러나 '이산수학'은 국민공통기본교육과정 중에 포함된 것이 아니라 선택중심교육과정 중의 한 과목이다. 즉, 이산수학은 10단계 수학의 이수 여부와 관계없이 이산수학에 관심을 가지고 실생활에 필요한 이산수학을 학습하기를 희망하는 일부 학생들만을 대상으로 하는 선택과목이다. 다시 말해서 자연계 수학을 공부하는 학생들 중 미분과 적분, 확률과 통계 그리고 이산수학 이렇게 세 가지 종류의 선택중심교육과정 중 한 과목을 선택하도록 하는 것이다. 이는 중등학교 전 과정을 정상적으로 학습하더라도 극히 적은 일부분의 학생들만이 이산수학을 접한다고 말할 수 있는 것이다. 결국 이산수학을 접하고 공부하는 학생들의 범위가 너무 한정되어 있다는 것을 의미한다. 오일러 정리는 중학교 7-나 단계의 심화과정이므로 기본 과정에서 제외되면서 일부 상위권 학생들에게 학습되어지는 부분이 되어 한 붓 그리기 또한 선택과목인 이산수학에 포함되어 있으므로 현재 극히 일부분의 학생에게만 학습되어지고 있으므로 실제적으로 위상기하에 대한 이러한 내용은 보통의 학생들에게 있어서 배울 기회가 없어진 것이다. 7차 교육과정에서는 수학을 쉽게 하여 학생들의 흥미와 관심을 높이기 위해 학습내용의 일부를 축소 또는 삭제 하였고 이 과정에서 여러 위상기하 내용이 제외된 것으로 볼 수 있다.

B. 오일러 정리

오일러 정리에 관하여 살펴보고자 한다.

[정의 3-1] R^3 상의 임의의 compact이고 편편한 면에 의하여 생기는 유계인 3차원 부분공간을 다면체(polyhedron)라 하며 다면체가 구로 변형이 되면 이때 이 다면체를 단순다면체(simple polyhedron)라 한다.

각뿔과 각기둥의 오일러 공식의 조사방법 중에서 한 가지 방법으로 꼭지점의 수를 v, 모서리의 수를 e, 면의 수를 f라 할 때 v, e, f의 관계를 귀납적으로 조사해 보면 다음과 같다.

	v	e	f		v	e	f
3각뿔	4	6	4	3각기둥	6	9	5
4각뿔	5	8	5	4각기둥	8	12	6
5각뿔	6	10	6	5각기둥	10	15	7
…	…	…	…	…	…	…	…
n각뿔	$n+1$	$2n$	$n+1$	n각기둥	$2n$	$3n$	$n+2$
$v-e+f=2$				$v-e+f=2$			

아래 표에서 f가 일정하면 $e-v$도 일정 하다는 것을 알 수 있다.

다면체	직육면체	5각뿔	5각기둥	6각뿔	6각기둥	7각뿔	정8면체
v	8	6	10	7	12	8	6
e	12	10	15	12	18	14	12
f	6	6	7	7	8	8	8
$e-v$	4	4	5	5	6	6	6

즉, f가 6, 7, 8이면 $e-v$는 각각 4, 5, 6이다. 따라서 다음과 같다.

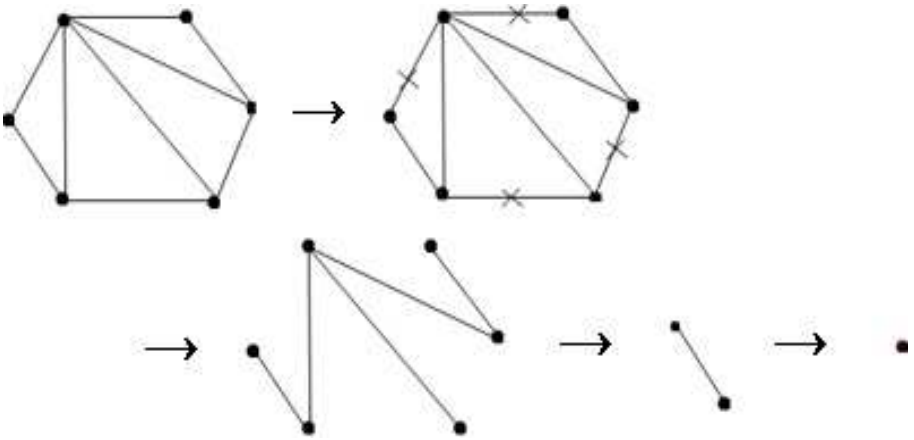
$$f-(e-v)=v-e+f=2$$

이러한 표를 제시하고 학생들에게 빈 칸을 채워 나가게 하는 것은 교사의 안내로 인한 학생들의 활동으로 오일러 정리를 직관적으로 이해하는데 도움

이 된다고 볼 수 있다.

[정리 3-1] 평면 위의 볼록 다각형을 f개의 볼록다각형으로 분할하여 얻어진 도형의 꼭지점 수를 v, 변의 수를 e라 하면 $v-e+f=1$이다.

(증명) 아래의 그림을 보면서 증명해보자.

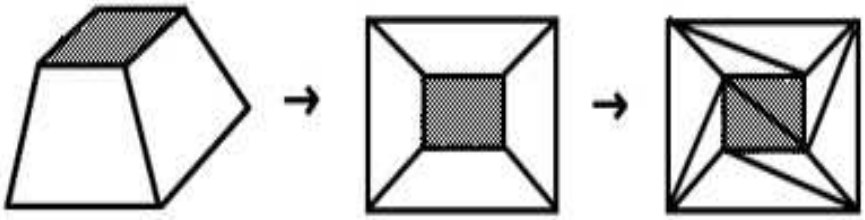


[그림 Ⅲ - 1] 볼록 다각형에서의 오일러 정리

분할되어 얻어진 첫 번째 도형에서 한 면(하나의 삼각형)에서 변을 한 개씩을 없애보자. 면의 경계는 두 변 이상으로 되어 있으므로 꼭지점과 연결성은 유지되도록 할 수 있다. 면이 다 없어질 때까지 이 조작을 계속하면 f개의 면과 f개의 변이 없어진다. 이와 같이하여 얻어진 세 번째 나무형 그래프를 보자. 여기에서 연결그래프를 유지하면서 한 변씩 없애나가면 변의 개수와 꼭지점의 개수가 같은 개수만큼 없어진다. 마지막에 남은 한 개의 변은 양끝에 꼭지점이 2개가 된다. 결국 한 개의 변과 한 개의 꼭지점을 없애면 점 한 개만 남게 된다. 즉 $v=1$이다. 거꾸로 올라가 보면 네 번째 그림에서 꼭지점과 변의 차이는 1로 $v-e=1$ 이 성립하고 거꾸로 올라가보면 세 번째 도형에서도 $v-e=1$이고 첫 번째 도형에서는 변과 면의 수가 같은 수만큼

늘어나므로 $v-e+f=1$ 이다.

이제, 아래 그림을 참조하여 다면체에서의 오일러 정리를 증명 할 수 있다.



[그림 Ⅲ - 2] 다면체에서의 오일러 정리

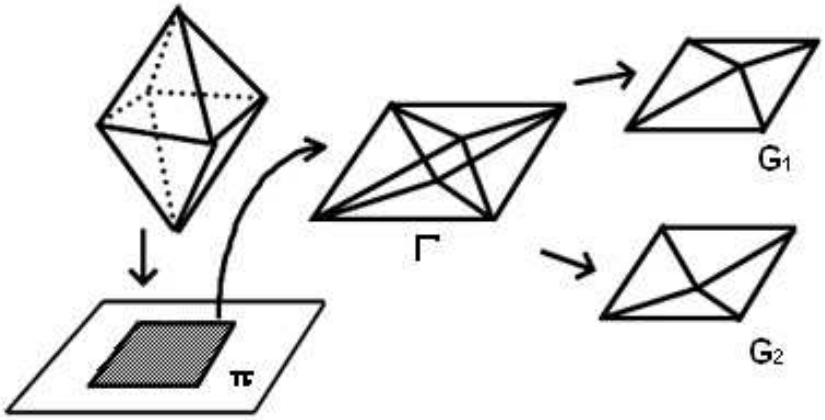
다면체에서 오일러 정리를 증명하기 위해 아래의 한 면을 없애고 고무줄처럼 늘인 다음 펼치게 되면 평면 위의 볼록 다각형으로 만들 수 있고 여기서 생기는 면에 대각선을 그어 면들을 삼각형으로 분할하면 위의 정리를 이용하여 볼록 다각형에서 $v-e+f=1$를 얻을 수 있다. 이 때 면을 분할하면서 꼭지점은 그대로 이고 면이 한 개, 변이 한 개 늘어나므로 $v-e+f=1$이 변하지 않는 다는 것을 알 수 있다. 맨 처음의 입체도형은 아래의 한 면이 더 많으므로 $v-e+f=2$ 의 오일러 정리가 증명된다.

또 다른 방법으로도 증명할 수 있다.

[정리 3-2] (데카르트 - 오일러정리)

볼록다면체에서 꼭지점의 수를 v, 모서리의 수를 e, 면의 수를 f라 하면 $v-e+f=2$ 이다.

(증명) 볼록다면체에서 면은 모두 볼록다각형이다. 또 면의 수와 변의 수가 유한이므로 이들 모두 면이나 변들에 평행이 아닌 방향이 존재할 수 있다. 이와 같은 방향 하나를 잡아서 이 방향에 수직인 평면 π를 정하자. π 위



[그림 Ⅲ - 3] 데카르트-오일러 정리

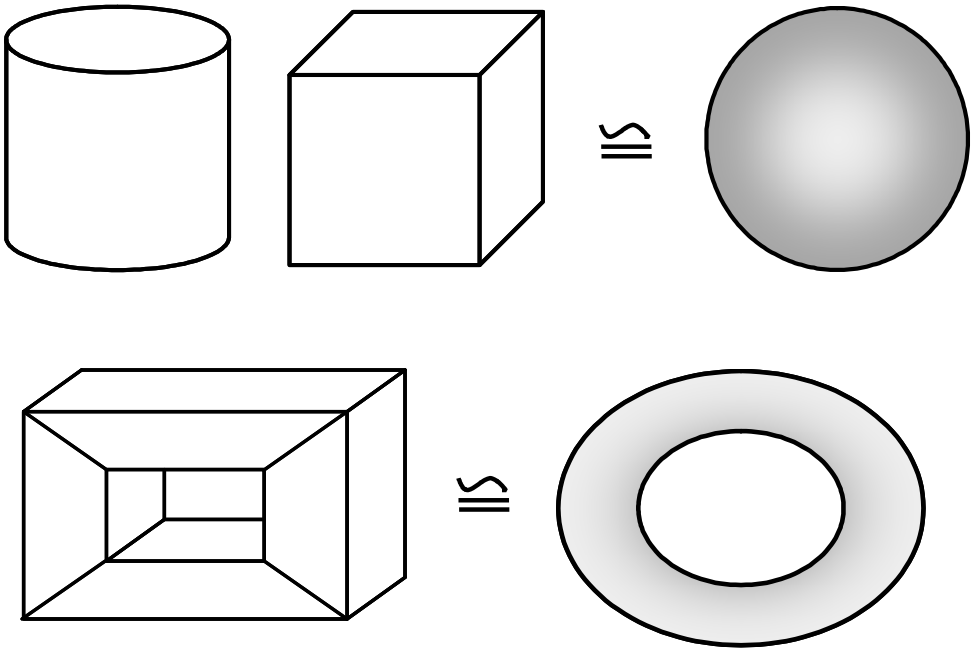
에 볼록다면체를 정사영하면 그 그림자로 볼록다각형이 만들어 진다. 이것을 Γ라 하자. 볼록다면체의 윗부분에 있는 변을 정사영한 것은 Γ의 분할이 된다. 이렇게 해서 만들어진 그래프를 G_1이라 하자. 같은 방법으로 아래 부분에 있는 변을 정사영한 것도 Γ의 분할이 되며 이것을 G_2라 하자. G_1, G_2의 꼭지점, 변, 볼록다각형의 수를 각각 v_1, v_2, e_1, e_2, f_1, f_2라 하면 [정리 2-2]에 의하여 $v_1 - e_1 + f_1 = 1$, $v_2 - e_2 + f_2 = 1$이다. Γ가 n다각형이면 $v_1 + v_2 - n = v$, $e_1 + e_2 - n = e$, $f_1 + f_2 - n = f$ 가 된다. 따라서 위의 식을 이용하면

$$
\begin{aligned}
f = f_1 + f_2 &= (1 - v_1 + e_1) + (1 - v_2 + e_2) \\
&= 2 - (v_1 + v_2) + (e_1 + e_2) \\
&= 2 - (n + v) + (n + e) \\
&= 2 - v + e
\end{aligned}
$$

이 성립한다. 즉, $v - e + f = 2$ 가 된다.[1]

[정의 3-2] 정다면체(regular polyhedron)는 각 면이 같은 수의 변을 갖고 각 꼭지점이 같은 수의 변을 가지며 모든 변의 길이가 같은 다면체를 말한다.

같은 의미로 정다면체는 각 면이 모두 합동인 정n각형($n \geq 3$)이고 각 꼭지점에서의 변의 수가 같은 다면체라고도 정의한다.



[그림 Ⅲ - 4] 오일러 정리와 위상동형

오일러의 다면체 정리는 꼭지점과 모서리, 면의 개수 사이의 관계를 가지고 구와 연결상태가 같은 다면체, 도우넛과 연결상태가 같은 다면체 등을 이해 할 수 있게 해주는 중요한 정리이다. [그림 Ⅲ - 4]에서 원기둥이나 직육면체와 같은 다면체는 구와 연결상태가 같은 도형으로 오일러 수가 $v-e+f=2$로 같고, 창틀모양의 다면체와 도우넛은 연결상태가 같은 도형으로 오일러 수가 $v-e+f=0$ 으로 같은 것을 알 수 있다. 서로 연결상태가 같

은 다면체는 서로 같은 오일러 값을 갖는 다는 것은 오일러 공식으로 충분히 증명되며 이러한 것이 위상적 관점에서 서로 같음을 의미한다는 것을 알게 된다. 즉, 오일러의 다면체 정리를 통해 우리는 그래프 이론과 위상기하학을 결합시키는 중요한 성질을 알 수 있는 것이다.

오일러 정리를 응용한 문제로 다음 정리를 소개한다.

[정리 3-3] 정다면체는 정4면체, 정6면체, 정8면체, 정12면체, 정20면체의 5종류만이 존재한다.

(증명) 정x면체의 한 면을 정n각형이라 할 때 정x면체에서 꼭지점에 모이는 모서리의 개수를 k라 하고 다면체의 꼭지점, 모서리, 면의 개수를 각각 v, e, f라 하면 $v=\frac{nx}{k}$, $e=\frac{nx}{2}$, $f=x$ 이다. ……(1)

오일러 정리에 의해 $v-e+f=2$

$$\frac{nx}{k}-\frac{nx}{2}+x=2$$

$$2nx-knx+2kx=4k$$

$$(nx-2x+4)k=2nx$$

$k\geq 3$ 이므로 (꼭지점에 모이는 면의 개수가 2개 이하일 수는 없다.)

① $k=3$ 인 경우 $(nx-2x+4)\times 3=2nx$

$$3nx-6x+12=2nx$$

$$(6-n)x=12$$

이 식의 해는 $\begin{cases}x=12\\n=5\end{cases}$, $\begin{cases}x=6\\n=4\end{cases}$, $\begin{cases}x=4\\n=3\end{cases}$ 이다. ……(2)

② $k=4$ 인 경우 $(nx-2x+4)\times 4=2nx$

$$4nx-8x+16=2nx$$

$$2nx-8x+16=0$$

$$nx-4x+8=0$$

$$(4-n)x=8$$

이 식의 해는 $\begin{cases} x=8 \\ n=3 \end{cases}$ ($n \geq 3$ 임에 주의)

③ $k=5$ 인 경우 $(nx-2x+4)\times 5=2nx$

$$5nx-10x+20=2nx$$

$$3nx-10x+20=0$$

$$(10-3n)x=20$$

이 식의 해는 $\begin{cases} x=20 \\ n=3 \end{cases}$ 이다.

④ $k \geq 6$ 인 경우 해는 없다.

왜냐하면 $k \geq 6$ 이라하면 $n \geq 3$ 이므로

$2=\dfrac{nx}{k}-\dfrac{nx}{2}+x \leq \dfrac{nx}{6}-\dfrac{nx}{2}+x=\dfrac{x}{3}(3-n) \leq 0$ 이 되어 모순이 된다.

따라서 x 가 취할 수 있는 값은 4, 6, 8, 12, 20 중에 하나이다.

	v	e	f
정4면체	4	6	4
정6면체	8	12	6
정8면체	6	12	8
정12면체	20	30	12
정20면체	12	30	20

위의 모든 빈칸을 다음과 같이 채울 수 있다.

예를 들면 위(2)에서 $x=f=6$ 일 때 $n=4$ 이므로 위(1)에서 $e=\dfrac{nx}{2}$ 로부터

$e=12$ 이고 오일러의 공식 $v-e+f=2$ 로부터 $v=8$ 이다. 즉 정6면체는 $v=8$, $e=12$, $f=6$ 이다. 같은 방법으로 나머지 다면체의 v, e, f 를 구할 수 있다.

C. 한 붓 그리기

한 붓 그리기를 하기에 앞서 몇 가지 정의와 정리를 살펴보고자한다.

[정의 3-3] 유한개의 점과 이들을 선분으로 이어서 만든 도형을 그래프(graph)라 하고 한 꼭지점에 이어진 변의 수를 그 꼭지점의 위수라고 한다. 그리고 임의의 두 꼭지점을 택했을 때 두 꼭지점이 연결된 변으로 이어진 그래프를 연결그래프라 한다.

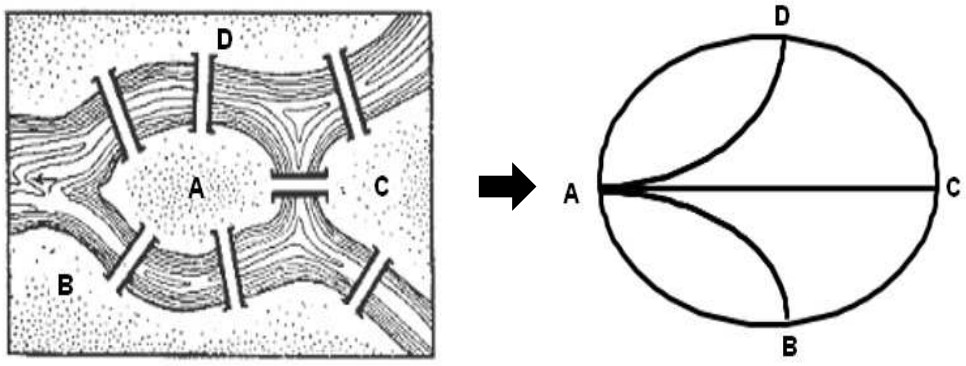
[정리 3-4] (한 붓 그리기) 연결그래프를 한 변을 한 번만 지나면서 그리기를 할 수 있다면 이 그래프는 위수가 홀수인 꼭지점이 없거나 있어도 두 개만 있다.

(증명) 연결그래프를 한 번에 그렸다고 하면 출발점에서 끝점까지 모든 변을 한 번씩만 지난다. 그리고 출발점과 끝점을 제외한 중간점들은 들어갈 때와 나올 때의 두 변을 사용하므로 중간점에서의 변의 수는 짝수개가 되어야 한다. 그리고 출발점과 시작점이 일치하면 모든 곳에서 위수가 짝수가 되고 출발점과 시작점이 다를 때에는 이 두 점에서만 이어져 있는 변의 수가 홀수가 된다. 결국 위수가 홀수인 점이 없거나 있어도 2개만 존재한다.

오일러는 오일러 정리를 발견한 데 이어, '케니히스베르그(Koonigsberg, 옛 프러시아의 수도이며 지금은 러시아의 칼리닌그라드이다.)의 다리문제'를 고

찰하였다. 당시의 수학계는 해석학에 치중되어있어 이러한 연구 결과를 바탕 삼아 위상적 문제를 다룰 만큼 관심을 모으지는 못했다.

18세기의 케니히스베르그라는 도시에 사는 사람들은 오랫동안 한 문제를 숙제처럼 안고 살아왔다. 이 도시를 흐르는 프레겔 강 위로 도시와 강안에 섬을 연결하는 일곱 개의 다리가 놓여 있는데 이 일곱 개의 다리를 모두 오직 한 번씩만 차례로 건널 수 있는 방법이 있을까 하는 문제였다. 많은 사람들은 경험적으로 이러한 방법이 존재하지 않을 것이라고 생각했는데 1736년에 오일러에 의해 증명되었다.



[그림 Ⅲ - 5] 케니히스베르그의 다리 문제

'케니히스베르그의 다리 문제'를 각각의 땅을 꼭지점으로 그리고 만일 땅을 연결하는 다리가 있으면 다리의 수만큼 두 꼭지점을 변으로 연결하여 그래프를 그려 보면 위의 그림과 같이 된다.

이제 이 문제는 '한 붓 그리기' 문제로 바뀐다. 각 점에서의 위수를 구해보면 A는 위수가 5(즉, 연결선이 5개)이고 B, C, D는 각각 위수가 3이다. 따라서 위수가 홀수인 점이 4개가 되어 [정리 3-4]에 의해 한 붓 그리기를 할 수 없게 되는 것이다. 즉, 케니히스베르그의 일곱 개의 다리를 오직 한 번씩만 차례로 건널 수 있는 방법은 존재하지 않는다.

위에서 살펴 본 바와 같이 '케니히스베르그의 다리문제'에서는 각 지역의 크기 또는 다리의 모양이나 길이 등은 문제 해결하는데 아무런 관계가 없고, 각 지역의 다리들과의 연결 상태만 문제가 된다. 따라서 실제의 그림과 선으로만 연결된 두 그림은 각 지역 간의 다리의 연결 상태가 같으므로, 도식화한 그림에서 한 붓 그리기가 가능한가 하는 문제로 간단히 해결된 것이다.

이와 관련하여 고등학교 이산수학에 있는 내용을 좀 더 살펴보면 다음과 같다.

[정의 3-4] 그래프에서 인접한 점(또는 변)의 나열을 경로라 하고 그래프에서 출발점과 종착점이 같은 경로를 회로라고 한다. 그리고 연결된 그래프에서 꼭지점은 여러 번 지날 수 있지만 모든 변은 오직 한 번만 지나는 경로[회로]를 Euler경로[Euler회로]라고 하며 그래프에서 모든 꼭지점을 오직 한 번씩만 지나는 경로[회로]를 Hamilton경로[Hamilton회로]라고 한다.

위의 정의를 이용하여 앞에서 언급한 한 붓 그리기의 정리를 되짚어 본다면 한 붓 그리기 [정리 3-4]에서 Euler회로가 존재하면 모든 점의 위수가 짝수이고 Euler경로가 존재한다는 것은 위수가 홀수인 점이 단 2개임을 알 수 있다. 또한 이를 이용하여 위수가 홀수인 점이 4개 이상이면 Euler경로는 존재하지 않는다는 사실도 쉽게 알 수 있다.

한 붓 그리기와 관련된 그래프의 모습은 우리의 실생활에서 쉽게 접할 수 있다. 예를 들면 놀이공원에서 같은 길을 되돌아가지 않으면서 놀이기구를 한 번씩 모두 탈 수 있을까 하는 문제 그리고 신문배달, 청소차량의 이동등도 이와 관련된다고 볼 수 있다.

이와 같이 실제의 크기, 모양 등을 생각하지 않은 그래프는 위상기하의 대상이 된다. 한 붓 그리기가 위상기하와 연관성을 갖게 되는 것도 이러한 이

유 때문이다. 점과 선으로 된 유한적인 도형 자체로 생각한다면 그것은 그래프 이론이 되지만 이것을 바탕으로 공간 구조를 말하게 되면 위상기하학인 것이다.

Ⅳ. 결론 및 제언

“나무를 보고 숲을 잊지 말라. 숲을 보고 나무를 잊지 말라.”라는 말이 있다. 위상기하의 큰 특징으로 대상에 대하여 거시적인 관점에서 전체를 통찰하는 능력을 길러준다는 것이다. 오일러 정리나 한 붓 그리기 등의 위상기하의 내용을 배움으로써 수학적 측면에서의 지식으로서 뿐만 아니라 여러 사회 전반적인 현상과 자연 현상을 좀 더 쉽게 이해 할 수 있게 되는 사고력의 확대를 얻을 수 있는 것이다.

오일러 정리나 한붓그리기 등 위상에 대한 내용이 중등수학에서 거의 제외되었다시피 되었다. 그러나 비록 지금은 없어진 내용이라 할지라도 수학을 가르치는 교사는 학생들에게 수학에 대한 즐거움을 알 수 있도록 해주고, 수학에 대한 전체적 분야에 대한 맥락을 짚어 줘야 할 필요가 있다고 생각한다. 그러기에 중등과정에서 학생들이 오일러의 다면체 정리를 이용하여 공간상에서 만들어지는 다면체의 종류가 다섯 가지 종류밖에 없음을 확인해보고 직접 한 붓 그리기가 가능한 도형들도 찾아보도록 하는 활동들이 학생들에게 수학에 대한 전반적인 이해를 돕는데 더욱 필요할 것이다. 또한 특별보충 수업을 할 때 심화반 학생들에게 오일러 정리를 가르치는 것도 필요할 것이라고 생각된다. 이러한 기초 지식을 습득하고 있는 학생들이라면 고등과정의 이산수학에서 그래프와 행렬 등과 연계하여 학습하여 쉽게 이산적인 방법의 힘을 느끼고 일상생활에서도 수학을 쉽게 응용하고 적용할 수 있을 것이다.

본 논문에서는 위상기하학에 대한 역사적 발전과정과 기본적인 개념 및 현재 중등학교 수학에 있어서의 위상기하학의 위치와 그 부분적인 내용을 살펴보았다. 위상기하 분야가 대수분야에서의 방정식과 함수처럼 계통화가 잘 이루어져 있지 않기 때문에 교사가 학생들에게 가르치는데 어려움이 있을 것으로 본다. 이 논문의 내용의 일부는 가르치는데 있어서 도움을 줄 수도 있고 대부분은 학생들에게 가르치는 것이 아니라 교사의 사전 지식으로 기본적으

로 숙지하여야 할 것들을 중심으로 내용을 정리해 보았다.

학문은 시대와 사회를 반영하면서 발전하는 것이다. 그것의 내용이 전달하는 과정에 있어서 어려움이 있다고 하여도 그 내용의 수준을 학생의 눈높이에 맞추고 학생 모두가 쉽게 이해하고, 활용할 수 있는 방법으로서 교수방법을 연구하는 것은 우리의 필수적 과제다. 학생들이 수학의 내용들을 쉽고 흥미롭게 학습할 수 있기 위해서는 생활주변 현상이나 구체적 사실을 학습소재로 구성하여 체계적으로 정리하여야 하고 이를 통해 실생활과 관련된 문제를 해결하는 능력을 길러 줄 수 있도록 다양한 문제들을 개발해야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] 장영식, 『위상수학』, 경문사 (1994)

[2] 장영식, 『위상수학기초론』, 경문사 (2007)

[3] 문명호・박종일,『위상수학 입문』, 제 2판, 경문사 (2005)

[4] Seymour Lipschutz 편역자 이장우,『일반위상수학』, 경문사 (2003)

[5] 임종술・이승온・이석종 공저, 『위상수학』, 교우사 (1997)

[6] 노영순, 『위상수학 기본』, 교우사 (2005)

[7] 유정옥, 『알기쉬운 위상수학』, 교우사 (2005)

[8] 박승안,『이산수학』, 경문사 (2006)

[9] 혼마다쓰오,『위상공간으로 가는 길』, 전파과학사 (1995)

[10] 교육인적자원부,『수학과 교육과정 제 7차 교육과정』, 교육부 고시 제 1997-15호 [별책8]

[11] 교육인적자원부,『중학교 교육과정 해설』, 교육부 고시 1997-15호

[12] 교육인적자원부,『고등학교 교육과정 해설』, 교육부 고시 1997-15호

[13] 강옥기 외2인,『중학교 수학 7-나 교사용지도서』, (주)두산 (2006)

[14] 1종 도서 편찬 위원회,『이산수학 교사용지도서』, 강원대학교 (2003)

[15] 이유금,『중등교과 관련 위상수학에 대하여』, 중앙대학교 교육대학원 수학교육전공 (2001)

[16] 신준국,『중학교 수학에서의 위상기하 영역에 관한 지도 내용 연구 및 지도방안 -도형의 관찰 중심으로-』, 충남대학교 (1998)

[17] 장연희,『중학교 교육과정과 위상기하학』, 연세대학교 교육대학원 (2002)

[18] 노용숙,『중등학교 수학에 관련된 위상의 다양한 문제들』, 중앙대학교 교육대학원 (2004)

[19] 이애경,『이산수학 교과목 상의 위상적 개념 지도방안』, 대진대학교 교육대학원 (2003)

[20] 임효정,『비유클리드 기하학에 관한 지도방법 연구』, 중앙대학교 교육대학원 (2000)

저작물 이용 허락서

학 과	수학교육	학 번	20048170	과 정	석사
성 명	한글: 윤 영 은 한문: 尹 泳 恩 영문: Youn Young-Eun				
주 소	광주광역시 남구 주월동 극동 아파트 201동 302호				
연락처	E-MAIL: 2558822@never.net				
논문제목	중등학교 수학의 위상기하에 관한 고찰 영문 : A study on topological geometry in mathematics of secondary school				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건 아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억장치에의 저장, 전송 등을 허락함
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집・형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포・전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송・출력을 허락함.

2007년 8월 일

저작자: 윤 영 은 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하