[UCI]I804:24011-200000232785

2006年 2月
教育學碩士(數學教育)學位論文

고등학교 미적분학 지도에서의 수학사 활용에 관한 연구

朝鮮大學校 教育大學院

數學教育專攻

曺 美 淑

고등학교 미적분학 지도에서의 수학사 활용에 관한 연구

A study on the applications of mathematical history in teaching high school calculus

2006年 2 月 日

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

曺 美 淑

고등학교 미적분학 지도에서의 수학사 활용에 관한 연구

指導敎授 安 永 濬

이 論文을 敎育學 碩士學位 請求 論文으로 제출합니다.

2005년 10 월 일

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

曺 美 淑

曺美淑의 敎育學 碩士學位 論文을 認准합니다.

審査委員長 朝鮮大學校 敎授 _____ 인

審 査 委 員 朝鮮大學校 敎授 _____ 인

審 査 委 員 朝鮮大學校 敎授 _____ 인

2005년 12 월 일

朝鮮大學校 敎育大學院

목 차

표 및 그림 목차 ····· iii
ABSTRACT ····· iv

제 *1* 장 서론 ····· 1

제 *2* 장 수학교육에서의 수학사 활용 ····· 4
1. 수학사 활용의 필요성 ····· 5
2. 수학사 활용의 효과 ····· 10
3. 수학사 활용의 방법적 측면 ····· 12
4. 수학사 활용에서의 교사의 역할 ····· 14

제 *3* 장 미적분학의 수학사적 배경 ····· 16
1. 적분학 ····· 16
   1) 적분개념의 기원 ····· 16
   2) Archimedes의 평형법 ····· 18
   3) Kepler의 포도주 통의 부피 측정 ····· 21
   4) Cavalieri의 불가분량법 ····· 22
2. 미분학 ····· 25
   1) 미분개념의 기원 ····· 25
   2) 무한소의 개념 ····· 29
   3) Newton의 유율법 ····· 32
   4) Leibniz의 미분학 ····· 33

제 *4* 장 고등학교 미적분학 지도에서의 수학사 활용 예시안 ····· 37
1. 예시안 1 : 미적분학 단원의 사전 준비학습 ····· 37
   1) 예시안의 개발 방향 ····· 37

2) 예시안 분석 및 설명 ····· 41
2. 예시안 2 : 구분구적법 ····· 48
1) 예시안의 개발 방향 ····· 48
2) 예시안 분석 및 설명 ····· 50

제 5 장 결론 ····· 56

참고문헌 ····· 58

표 목 차

(표 4-1) 예시안 1 : 미적분학 단원의 사전 준비 학습(1/3) ····· 38
(표 4-2) 예시안 1 : 미적분학 단원의 사전 준비 학습(2/3) ····· 39
(표 4-3) 예시안 1 : 미적분학 단원의 사전 준비 학습(3/3) ····· 40
(표 4-4) 학생 제공용 읽을거리(1/2) ····· 46
(표 4-5) 학생 제공용 읽을거리(2/2) ····· 47
(표 4-6) 예시안 2 : 구분구적법 ····· 49

그 림 목 차

(그림 3-1) 포물선 부분의 구적법 ····· 17
(그림 3-2) 평형법에 의한 구의 부피 측정 ····· 19
(그림 3-3) 곡선 사이의 넓이와 부피 ····· 20
(그림 3-4) Kepler의 원과 타원의 넓이 ····· 22
(그림 3-5) Cavalieri의 타원의 넓이 ····· 23
(그림 3-6) 타원의 넓이를 통한 구의 부피 측정 ····· 24
(그림 3-7) 최대 분할 ····· 26
(그림 3-8) 접선영 ····· 27
(그림 3-9) Barrow의 곡선의 접선 구하기 ····· 28
(그림 3-10) 직선 및 곡선의 기울기 ····· 34
(그림 4-1) 아킬레스와 거북이의 경주 ····· 39
(그림 4-2) 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이 ····· 40
(그림 4-3) 아킬레스와 거북이의 경주 메카니즘 ····· 41
(그림 4-4) 내접 · 외접하는 정n다각형의 넓이 ····· 52
(그림 4-5) 포물선 $y=x^2$ 부분의 넓이 ····· 53
(그림 4-6) 구의 부피 ····· 55

ABSTRACT

A study on the applications of mathematical history in teaching high school calculus

Jo, Mi Suk

Advisor : Prof. Ahn, Young Joon

Mathematics Education

Graduate School of Education, Chosun University

Calculus has been applied to various fields, such as natural science, statistics and economics. Nevertheless, most student don't understand fully what the calculus is because they don't understand the concept of limit, which is the basic of calculus, and they have to study in test-oriented environment. To solve these problems, a lot of interesting teaching methods should be developed. So, this thesis tried to find how mathematical history can be applied to the calculus in high school.

First, the application of mathematical history and the effect were surveyed through the preceding studies. With these, the development of teaching and learning materials in classes related to the role of teachers was discussed, and the background of the calculus was researched with the mathematicians' ideas as the origin of calculus. Moreover, the examples on the application of mathematical history in high school mathematics were developed.

The example which were made on the basis of mathematical contents and questions, will be applied to the preparation in teaching calculus and the mensuration by parts. This example will help teachers solve the problems in teaching calculus and improve the quality in mathematics education and the effect in learning. In this thesis, two examples regarding the application of mathematical history were presented.

To enhance the teaching skill through the application of mathematical

history, the following studies on the teaching and learning materials with mathematical history, and various teaching methods applied to real classes should be developed.

제 *1* 장 서 론

자연과학의 급속한 발달을 가져온 미적분학이 하나의 기계적인 계산방법이나 절차를 가르치는 영역으로밖에 여겨지지 못하는 것은 수학의 본질을 이해하지 못하고 있는 한 단적인 예라고 볼 수 있으며 여기에는 여러 가지 이유가 있겠으나 먼저 미적분의 접근 방법과 관련하여 생각해 볼 수 있다. 현행 교과서는 미적분을 극한 개념의 응용으로 도입하고 있다. 그러나 미적분의 기본적 개념으로 도입된 극한 개념은 그 자체가 학습자가 학습하기 쉽지 않으며 대부분의 학생들은 미적분을 학습하면서 수학의 다른 분야와 마찬가지로 교과서에 나온 방식만이 유일한 것이라고 생각한다.

미분의 기초 개념인 극한의 불충분한 이해와 한정된 수업시간동안의 입시교육이 시행됨에 따라 대부분의 학생들은 미적분학의 개념에 대한 이해가 부족하게 되고, 따라서 더 높은 수준의 학습수준으로 이어지지 못하며 수업시간이 지겹고 암기위주의 학습이 되고 있는 현실이다.[18] Newton과 Leibniz에 의해 미적분이 만들어졌다는 것은 교과서에 나오는 읽을거리를 통해 알지만, 자신들이 배운 것과 동일하게 처음부터 이루어졌으리라 생각하지 못하며, Newton과 Leibniz 이전에도 미적분의 중요한 여러 문제들이 연구되었다는 사실은 모른다.

또한 미적분학의 기초적인 학습은 물리적인 면이나 응용적인 면에서 기하, 공학, 물리학 등의 학습에 기초가 되며, 연계성이 강하기 때문에 자연과학뿐만 아니라 통계학 및 확률론, 경제, 경영학 등 모든 분야에 다양하게 적용되고 있다. 그러나 미적분을 배우는 학생들은 이러한 점을 실감하지 못하고, 그저 기능적인 계산과 응용이 된 과다한 미적분 학습 분량을 힘겨워하고 있는 실정이다.

실제로 미적분을 탄생시킨 계기가 되었던 문제들은 단지 미적분 단원의 응용문제로서 다루어지며 앞에서 배운 계산을 연습하는 과정으로 여겨진다. 따라서 미적분이 갖는 중요성과 의미는 상실된 채 단순히 계산법의 숙달에만 초점을 맞추게 되는 것이다. 또한 미적분학 개념은 직관적으로 이해하기에는 많은 어려움이 따르고, 실제 고등학교 수준에서는 개념의 원리나 이해보다는 형식적인 정의와 공식화

된 풀이방법을 지도하고 있다.

이러한 미적분학 교육의 문제점을 해결할 수 있는 지도방법과 학생들이 미적분학을 재미와 흥미를 느끼면서 배울 수 있는 각종 방법에 대한 연구가 절실히 요구된다. 따라서 본 논문에서는 미적분학의 수학사적 배경과 미적분의 교수·학습 방법을 연결시켜 보고자 한다.

전통적으로 고집되고 강조되어온 현재의 연역적 전개에 따른 교과서 구성 및 지도는 그 편리성과 체계적인 논리성 때문에 아직까지도 부동의 위치를 고수하고 있다. 이러한 연역적 전개 양식은 수학적 개념의 발생과 그 필요성을 제시하지 못한 채 최종적으로 다듬어진, 완성된 수학적인 개념과 정리를 논리적인 전개 순서에 따라 제시하는 것을 원칙으로 하고 있다. 그러나 학습자 중심의 학습지도 원리가 부각되고 있는 최근 수학교육 동향에 의하여 연역적인 지도방법은 그 한계성을 드러내고 있으며, 이에 대한 대안으로 역사 발생적 원리에 의한 지도 원리를 들 수 있다. 역사 발생적 원리는 수학의 역사에서 볼 수 있는 개념의 발생과 그 발달 과정을 고찰하여 학생들이 보다 잘 이해할 수 있도록 교재를 구성하고, 교수·학습에서 활용하게 하려는 것을 뜻한다.

그러나 역사 발생적 원리에 따라 교재를 구성하였을 때, 그 분량의 방대함을 생각하지 않을 수 없으며, 정해진 시간에 정해진 진도를 마쳐야 하는 문제를 생각하면, 전적으로 학생의 사고 과정을 중시하는 역사 발생적 원리는 한계에 부딪힐 수 밖에 없다. 따라서 이 단점을 조금이나마 극복할 수 있는 방안으로 역사 발생적 원리에 의한 지도법 중 수학사를 활용한 지도를 들 수 있다.[16]

또한, 우리나라 제 7 차 교육과정에서는 수학적 힘(mathematical power)을 강조하고 있는데, ‘수학적 힘’이란 탐구하고, 예측하며 논리적으로 추론하는 능력, 수학에 관한 또는 수학을 통한 정보교환 능력, 수학 내에서 또는 수학과 다른 학문적 영역 사이의 아이디어를 연결하는 능력, 문제 해결력이나 어떤 결정을 내려야 할 때 수량과 공간에 관한 정보를 찾고 평가하고 사용하려는 성향과 자신감을 포함한다. 수학적 힘을 기르기 위해서는 수학의 기본 지식, 추론 능력, 문제 해결력, 수학

적 아이디어의 표현 및 교환 능력, 그리고 사고의 유연함, 인내, 흥미, 지적 호기심, 창의력을 길러주는 다양한 교수·학습 방법을 필요로 한다.

수학의 본질을 이해하고, 수학적 사고를 강조하는 제 7 차 교육과정은 수학사를 활용한 학습-지도에 중요한 시사점을 주고 있다. 또한 수학사를 활용한 학습을 통하여 학생들의 수학적 사고 능력은 십분 발휘될 수 있기에 충분하다.

본 논문에서는 고등학교 미적분학 지도에 있어서 수학사를 활용하는 방안을 모색해 보고자 한다. 본 연구의 구성 및 내용은 다음과 같다.

제 2 장에서는 이론적 배경으로 수학교육에서의 수학사 활용에 대한 선행 연구 자료를 살펴보고자 한다. 수학사 활용의 필요성과 그 효과 그리고 실제 수업 전개 및 교수·학습 자료 개발과 밀접한 관련이 있는 수학사 활용의 방법적 측면, 수학사 도입에서의 교사의 역할에 대하여 논할 것이다.

제 3 장에서는 미적분 개념의 기원이 되는 여러 수학자들의 아이디어를 중심으로, 미적분학의 수학사적 배경을 고찰할 것이다.

제 4 장에서는 수학사 활용에 관한 이론과 미적분학의 수학사적 배경을 토대로 고등학교 미적분학 지도에 있어서 수학사 활용 예시안을 제시하고자 한다.

제 2 장 수학교육에서의 수학사 활용

발생적 원리는 수학을 논리적으로 전개된 결과적 지식체계로 가르치는 연역적인 교재 구성을 강조하는 형식주의의 결함을 극복하기 위하여 제기되어 온 수학 학습 지도 원리로, 수학을 완성된 산물로서가 아닌 발생과정 곧, 수학화의 과정을 되밟게 함으로서 바르게 이해하고 적용될 수 있음을 바탕으로 하고 있다.[2] 학교수학의 역사 발생적 접근은 학생들로 하여금 수학을 반박할 수 없고 변하지 않는 진리로 이루어진 것으로 생각하기보다는 인간에 의한 끊임없는 반성과 개발의 노력에 의한 것으로 생각하게 해준다.

역사 발생적 원리는 개체발생은 종족발생의 전 과정을 단축된 형태로 반복한다는 생물학적 원리를 정신 영역에 적용한 것으로, 이는 수학의 역사에서 볼 수 있는 역사적 도식화 과정을 시간적으로 단축하여 학생들이 그것을 수학의 교수·학습에서 재현하게 한다는 교수학적 원리라 할 수 있다.[3]

이러한 역사 발생적 원리는 18세기 이래로 여러 학자들에 의해 수학을 논리적으로 전개된 결과적 지식 체계로 가르치는 연역적인 수학교육에 대한 반성과 함께 그 결함을 극복하기 위해 제기된 수학학습 지도 원리로서 꾸준히 주장되어 왔다. 수학교육의 궁극적인 목표가 수학적 사고 교육에 있다면, 학생들에게 역사적인 학습과정, 다시 말해 수학의 발달이라고 하는 인류 전체의 학습과정을 단축된 형태의 가상적인 과정으로 재현시켜줌으로써 수학화와 수학적 사고의 경험을 할 수 있게 하는 일은 무엇보다 중요하다고 할 수 있다.

어떤 개념을 가르치려면 개념들을 서로 연결시켜 주고 그들의 논리적인 상호관계를 발견할 수 있도록 도와주는 데 관심을 가져야 한다. 문맥을 떠나서 또는 고립되어 개념을 가르쳐서는 안 된다. 이전의 사람들이 취했던 단계와 따라온 접근 방법을 더 많이 제시할 필요가 있다. 중등학교 수학을 가르치는 근본 목적은 학생들이 생각하고 배우는 직관적인 방법을 분석적이고 논리적인 것으로 바꾸려는 것이 아니다. 오히려 그것을 적절히 조합하여 조화로운 발달을 꾀하려는 것이다. 역사 발생적인 원리에 따른 교육은 수학교육의 중요한 목표를 달성하는 데 매우 적합한

하나의 방법이라 할 수 있다.

그러나 역사 발생적 원리에 따라 교재를 구성하였을 때, 그 분량의 방대함을 생각하지 않을 수 없으며, 정해진 시간에 정해진 진도를 마쳐야 하는 문제를 생각하면 전적으로 학생의 사고 과정을 중시하는 역사 발생적 원리는 한계에 부딪힐 수 밖에 없다. 따라서 역사 발생적 원리에 의한 지도법 중 수학사를 활용한 지도는 이 단점을 조금이나마 극복할 수 있는 방안이라 할 수 있다.

학생들에게 진정한 수학을 가르치고자 한다면 수학의 역사를 간과해서는 안 된다. 그들에게 필요한 것은 수학을 통한 논리성과 이해력 향상일 수 있으나 이들을 위해 가르쳐지는 수학을 올바로 이해하기 위해서는 수학사를 알고 있어야만 한다. 그렇게 함으로써 수학은 지루하고 틀에 박힌 딱딱한 과목이 아니라 이해하고 설명될 수 있는 과목이라는 올바른 인식을 가질 수 있게 되는 것이다.

학습-지도 과정에서 수학사를 적절히 활용한다면 보다 의욕적이고 활발한 수업이 전개될 수 있을 것이다. 이 장에서는 수학사 활용의 필요성과 그에 따르는 효과, 이를 위한 방법과 수학사 도입에서의 교사의 역할에 대하여 알아보고자 한다. 요즈음의 수학적 지식의 학습과 계산 기능의 습득보다 학생들의 수학적사고력 향상을 도모하는 수학교육의 추세로 볼 때, 이는 수학사에 대한 인식과 교육현장에서 교사가 어떻게 수학사를 도입해야 하는가에 대한 방법론적인 문제에 도움이 될 것이다.

1. 수학사 활용의 필요성

수학 교육의 목적과 학교 교육에서 수학을 교과로 선정하는 이유를 다음과 같이 세 가지로 살펴 볼 수 있다.[5]

첫째, 수학을 배우면서 사회생활을 할 때나 과학이나 다른 학문을 공부하는 데 도움이 된다(실용성).

둘째, 수학적 정신 능력을 신장시킬 수 있다(정신도야성).

셋째, 수학의 미적 가치를 학생들에게 인식시키는 것이다. 그리고 인류문화 유산의 계승 등이 있다(심미성).

이러한 목적을 달성하기 위해 제 7 차 교육과정에서 제시한 수학교과의 기본방향은 다음과 같다.[19]

첫째, 개인의 능력 수준과 진로를 고려하여 초등학교 1학년부터 10년간 20단계로 수준별 교육과정을 운영하고 고등학교 2년 과정에서는 계열별 구분 없이 자기의 능력과 진로에 맞는 수학을 선택하도록 한다.

둘째, 수학적 사고력과 문제 해결력을 길러주는 수학교육을 한다. 수학의 사고력을 기르기 위해서는 수학의 기본지식이 바탕이 되어 흥미와 탐구하고자 하는 호기심을 심어주며, 창조성을 불러일으키는 학습을 하도록 한다.

셋째, 계산기와 컴퓨터를 수학학습에 활용한다.

넷째, 능력별 이동수업, 열린 수업, 개별학습 등 다양한 지도와 학습방법으로 다양한 학습 자료와 영상매체 등을 활용한다, 또한 평가 방법도 지필검사, 수행평가, 관찰, 면담 등을 동시에 실시한다.

끝으로 수학의 학습을 통하여 수학에 대한 흥미, 자신감, 가치인식, 사고의 유연성, 인내력 등을 길러서 수학을 스스로 공부하고 연구하여 활용할 수 있도록 한다.

수학사를 활용한 학습-지도는 위에서 살펴본 제 7 차 교육과정 상의 수학교과의 교육 목적에 부합되며, 또한 교과 과정의 한 구성요소로써 제 몫을 담당할 수 있다. 이제 수학사를 활용한 수학 수업이 왜 필요한가에 대해 살펴보고자 한다.

백석윤은 수학사 지도의 필요성을 다음과 같이 말하고 있다.[11]

첫째, 수학내용에 대한 역사적 의의를 알게 됨으로써 학생들의 수학에 대한 흥미, 적극적인 학습의욕, 학습 노력을 불러일으킨다.

둘째, 수학적 개념이나 내용의 생성 변천 과정을 통하여 학생들의 잘못된 인식과 오개념을 정립시킨다.

셋째, 수학에 대한 무미건조함을 해소시킨다. 즉, 수학을 실생활과 연결시켜 의미

를 찾아볼 수 있게 하는 계기를 마련하고 수학 내용이 실생활과 유리된 불필요한 과목이라는 잘못된 편견을 시정할 수 있는 계기를 마련한다.

넷째, 수학 형성의 배경, 수학자나 당시 사회와 관련된 흥미로운 에피소드, 수학적 개념 내용의 발생과 변천 과정에 대한 재미있는 이야기 등으로 학생들의 잘못된 선입관과 편견을 바람직한 방향으로 시정, 유도하게 한다. 이를 위하여 수학사가 제공하는 수학자들의 관련 일화는 수학의 인간적인 측면을 인식하게 할 수 있고, 수학의 엄밀성, 완벽성에 대한 학생들의 거부감 해소에 도움이 된다.

다섯째, 수학의 발달과정은 자연과학의 발달과정과 밀접하게 연관되어 있으므로 수학은 편협한 과목이 아니라 일반적인 성격이 강하고 적용범위가 넓은 기초과학 과목이라는 폭넓은 이해를 갖게 하는데 도움이 되며, 이러한 이해를 통해 갖게 되는 수학에 대한 올바른 인식은 학생들의 수학 공부에 대한 올바른 태도를 가져다 줄 것으로 기대된다.

여섯째, 일선 교사의 적절한 방법을 통한 수학사의 응용은 학생들의 주의 집중과 변화를 가져오게 한다.

일곱째, 수학적 구조나 개념의 형성, 발전 과정의 고찰은 학생의 수학적 구조나 개념의 형성에 도움이 되고, 수학 교육 과정의 연구에도 중요한 참고 자료가 된다.

NCTM에서는 다음과 같이 수학사를 도입해야 하는 이유에 대해 언급하고 있다.[9]

첫째, 역사는 동기를 부여한다는 것이다.

아동들은 Archimedes에 대하여 들은 이야기를 생각하며, 기하학에 관해 공헌했음을 느끼게 되고, 수학의 매력을 느낄 수 있을 것이다.

둘째, 수학이란 인간의 노력의 산물이라는 것을 알게 한다.

기술의 발달에 의하여 요즘의 아동들은 수학이란 단지 계산기와 컴퓨터에 의해 해결되어지는 것으로 먼저 인식해버릴지도 모른다. 그들은 스스로 수학을 이해하거나 계산과정을 알아볼 필요가 없다고 생각할지도 모르며, 그 결과만 중시하게 된다. 그러나 문제해결은 아직 본질적으로 인간이 해야 할 과정이며 발견은 그 시대 사람들의 요구에 의해 생성되어왔다는 것을 수학사를 통해 인식시킬 수 있다.

셋째, 수학이 사람들이 행하는 어떤 것이라면 그것을 행한 수학자들의 이야기에는 같은 것을 행하려는 다른 사람들을 고무시킬 수 있는 힘이 있다.

수학자들의 역경을 보면서, 그들의 삶은 열정적인 연구와 굳은 결심들의 힘에 의해 뚜렷이 나타난다는 것을 알 수 있다.

넷째, 수학적 개념이 어디에서 유래되었는지를 아는 것은 매우 중요하다.

수학적 아이디어의 기원을 이해하는 것은 학생들이 매우 어려워하는 내용이나 추상적인 수학적 절차를 이해하기 위해 더욱 효과적이며, 이러한 기원에 대한 일화들이 또 다른 새로운 영역에 대한 연구의 발판이 되기도 한다.

다섯째, 수학사의 도입은 문제해결을 위해 다양한 방법적 접근을 갖게 해준다.

자신의 경험에 의해서 이런 다양한 방법을 사용하여 얻은 계산 결과를 대부분이 사용하는 보통의 공식으로 얻어진 계산결과와 비교해 볼 때, 그들은 문제를 해결하는 방법을 단 한가지로 제한하지 않는다는 것을 발견할 수 있다.

여섯째, 수학적 기원을 탐구하는 것은 종종 수학자체의 상호연관성을 위한 창을 열어주는 것이다.

일곱째, 과거의 수학사는 오늘날과 연관성을 갖게 된다. 수학사는 과거로부터 미래를 이어주는 다리가 된다.

또한, 사단법인 수학사랑의 98수학사 세미나팀은 수학사를 수업에 도입해야 하는 필요성에 대해 다음과 같이 언급하고 있다.[12]

첫째, 수학의 역사 발생적 원리가 개체의 수학능력 발달과 밀접한 관련이 있다.

현실과 분리된 내용들을 다루는 학교수학을 배우면서 학생들이 갖는 의문점 가운데 하나가 “도대체 누가 왜 이러한 것을 생각하였을까?” 라는 것이다. 이 의문에 답을 얻지 못한 채 학생들은 수학 교과는 처음부터 완벽한 형태로 존재해 온 것이라 생각하게 되고 수학에 대한 흥미와 자신감을 점점 잃어간다. 완성된 형태로서의 수학을 보여주는 현재의 연역적 교재 구성은 학생들에게 참다운 수학을 알려 주지 못한다. 이러한 구성에서 벗어나 수학의 과정적 성격에 따른 학습-지도 원리가 역사 발생적 원리이다. 이 원리에 따르면 수학은 완성된 산물이 아니므로 수학의 역사적 발생과정을 현재의 학생들이 수학의 교수·학습에서 재현하여 학생들이 수학

적 지식을 구성하는 과정을 이해하도록 해야 한다는 것이다.

둘째, 수학사를 활용한 수업은 학생의 흥미와 호기심을 자극할 수 있다.

수학사를 앎으로써 완벽한 수학 체계 앞에서 사고의 자유를 잃은 학생에게 수학의 시행착오적 발달과정을 보여줌으로써 정서적인 친밀감을 높일 수 있고 수학의 필요성을 이해하고 학습동기와 의욕을 가질 수 있다. 또한 학습에서 흥미를 유발하여 학습효과를 높이고, 수학의 발견과정과 수학적 개념과 원리를 이해하고 자신감을 형성한다.

셋째, 수학사를 활용하면 학생의 정의적 발달에 도움이 된다.

수학사를 수학교육에 활용함으로써 수학은 절대적 진리나 변할 수 없는 이론이 아니라 우리도 수학을 비판적으로 바라보고, 새롭게 변화 발전시킬 수 있다는 개방적인 생각을 가질 수 있다. 역사적 미해결 문제들을 풀기 위해서 많은 사람들이 엄청난 노력으로 연구한 결과, 오늘날 수학의 이론들이 형성되었다. 위대한 수학자들도 현재의 정교한 이론을 만드는 과정에서 어려움과 실수를 했다는 사실을 통하여 문제해결 과정에서 시행착오를 거듭하는 학생들에게 용기를 북돋아 줄 수 있고 과제 집착력을 기를 수 있다. 또, 조상들이 직면했던 어려운 수학 문제들과 새로운 개념들을 대면하여, 이해하고 해결할 수 있는 탐구와 개척의 정신으로 해결하는 기쁨을 얻을 수 있다. 따라서 수학의 역사는 수학과 인생의 지혜가 되는 가치관을 확립할 수 있는 정서적 측면의 좋은 학습 자료가 될 것이며 수학에 대한 자신감, 가치인식, 사고의 유연성, 인내력 등을 길러서 학생 스스로 수학을 공부하고 연구하여 활용할 수 있도록 할 수 있다.

이외에도 수학교육에서의 수학사 활용의 중요성을 강조하고 있는 여러 선행 연구 결과가 있다. 이들의 공통된 주장을 다음과 같이 요약할 수 있다.

첫째, 수학에 대한 올바른 인식과 태도를 지니게 할 수 있다.

수학의 무미건조함을 해소시켜 주고, 수학의 유용성을 알려 줄 수 있다. 또한 수학은 발전하는 학문임을 인식하고, 수학 자체를 이해하는 데 도움을 준다. 자연현상과의 관련을 이해하게 하여 수학이 폭넓은 기초과학임을 자각하게 해 준다.

둘째, 학습자의 정의적 측면의 교육에 기여한다.

수학적 성향 및 수학에 대한 흥미와 관심 유발, 동기 부여, 수업에 대한 참여도 증가, 학습 의욕 증대 등 지적 교육을 도울 수 있는 정의적 교육에 기여하여 학습 효과를 증대시킬 수 있다.

셋째, 수학의 '인간화'를 도모할 수 있다.

수학은 '인간적인 과목'이며, 수학 자체가 인류문화의 전달자임을 알게 해준다.

2. 수학사 활용의 효과

Freudenthal은 수학사를 수학 교육에 이용하면 다음과 같은 이점이 있다고 적고 있다.[3]

첫째, 알고리즘적인 계산 수학을 반성하여 개념적 사고를 고취하는데 이용할 수 있다.

둘째, 교육과정 구성에서 '자연스러운' 내용 배열의 준거가 되며, 학습-지도에서 수학적 아이디어의 발달 과정을 따름으로써 자연스럽게 그 이해를 도울 수 있다.

셋째, 수학의 역사적 발달 과정에 소급해봄으로써 수학적 사고의 인간적인 모습을 접해 보게 하여, 학습 동기를 유발하고 수학 학습에 생기를 불어넣을 방안을 찾을 수 있다.

넷째, 현대 기술 문명의 발달에서의 수학의 중심적인 역할과 수학의 문화적인 역할, 특히 인간관과 세계관 형성에 미친 수학의 역할을 이해함으로써 수학에 대한 학생들의 인식을 바꿀 수 있다.

김춘영은 수학 교육에서의 수학사 도입의 효과에 대하여 다음과 같이 말하고 있다.[10]

첫째, 흥미와 자신감을 고취시킨다.

어떤 특정한 수학 단원을 학습하는 시간에 그 수업의 내용과 관련이 있는 문제

를 수학사에서 발췌하여 당시의 그 문제에 대한 간단한 배경 설명과 함께 학생들에게 제시하면, 학생들은 역사 속에서 당시의 문제를 의식하고 해결해보려 노력하는 가운데 자연히 새로운 흥미를 갖게 될 것이다. 또 수학적 개념이나 내용의 생성 변화를 의식하게 해 줌으로써, 문제 해결 과정과 방법을 다시 음미하여 오늘날의 수학을 이해하는 데 도움을 준다.

둘째, 수학의 형성 배경과 변천 과정을 통해 새로운 수학관을 확립한다.

수학의 형성의 배경이라 할 수 있는 수학자와 당시 사회와 관련된 흥미로운 이야기, 그리고 하나의 수학적 개념이나 내용의 변천 과정에 얽혀 있는 이야기 등은 학생들로 하여금 수학에 대한 부정적 편견을 줄이고, 바람직한 방향으로 유도할 것이다. 사실 많은 학생들이 수학은 어렵고, 추상적이며 재미없는 과목이라는 생각을 하고 있는 현실이다. 학생들의 이러한 생각을 해소해 주기 위해서 수학자들에 관련된 일화 등의 소개로 수학이 갖고 있는 인간적인 측면을 인식시켜 줄 수 있다. 즉 수학이라는 딱딱한 과목도 인간이 생활해 나가면서 필요에 의하여 창조, 수정, 다듬어져 현재와 같은 완성된 모습을 갖추게 되었고 또한 앞으로도 계속 변천될 가능성을 갖고 있음을 알게 함으로써 학생들의 수학에 대한 거부감을 어느 정도 해소해주는 역할을 할 것이다.

셋째, 수학의 폭넓은 수용성과 과학 발달 현상과의 연관성을 이해한다.

수학과 자연과학의 발달 과정에서 등장하는 이야기들은 자연계에 존재하는 여러 가지 원리들이 수학과 어떠한 관련이 있는가를 간접적으로나마 시사해 준다. 따라서 수학이 우리 생활과 아주 동떨어진 과목이 아니라 그 적용 범위가 넓은 기초 과학이라는 폭 넓은 이해를 갖게 하는데 도움이 된다. 이러한 수학에 대한 올바른 인식은 학생들의 수학 공부에 바른 태도를 가져다 줄 것이다. 수학사는 때로는 수학 수업 시간에 학생들의 주의를 집중시키거나 흥미를 유발시키는 방법으로도 사용이 가능하다. 수학사의 응용은 지루한 수학 수업에 활기를 불어넣을 수 있게 해주고 분산된 학생들의 관심을 수학 학습에 다시 끌어들이는 역할도 할 수 있다. 즉, 수학을 지도하는 교사의 수학사에 대한 풍부한 지식과 이해는 즐거운 수학 학습의 기회를 교사나 학생 모두에게 가져다 줄 것이다.

넷째, 학생 성장에 따른 교육과정 개발에 참고가 된다.

어린이들의 수 체계 형성 과정은 인류 문화에서 수체계의 역사적 발전과정과 흡사함을 본다. 수학사에서 찾아 볼 수 있는 일련의 수학적 구조나 개념의 형성, 발전 과정의 고찰은 학생들의 수학적 구조나 개념의 형성과정을 연구하는데 도움이 될 것이며, 나아가서 수학 교육과정의 연구에도 중요한 참고 자료가 될 것으로 본다.[3]

또한, 초등학교와 중등학교에서 각각 수학사를 실제 수업에 도입해 보고, 그 효과를 검증한 연구 자료인 김춘영(1993)의 <수학사를 이용한 국민학교 수학과 교재 개발 연구>와 정미경(1994)의 <수학사를 도입한 중・고등학교 수체계 지도에 관한 연구>에 의하면, 수학사를 실제 수업에 적용해 본 결과 수업에 활기를 불어 넣어 주고, 학습자의 흥미를 북돋았으며, 학습동기를 유발하고, 수학적 지식 구성에 도움을 주는 등 주로 정의적 측면에서의 효과를 증대시켰다고 한다. 그러나 무엇보다도 가장 큰 효과는 학습자로 하여금 수학에 더 가까이 다가갈 수 있도록 유도할 수 있었다는 것이다.[10, 15]

3. 수학사 활용의 방법적 측면

수학사를 활용하기 위해 많은 시간을 할애하는 것보다 수학이란 학문을 이해하고 흥미를 유발할 수 있도록 적절히 제시해 주는 것이 중요하다. 자칫 잘못하면 수학사를 위한 수학 수업이 될 수가 있음을 유의해야 하고, 수학사를 도입할 시기와 방법은 수업에 중요한 변인이 된다고 볼 수 있다.

실제 수업과 직접 관련된 수학사적 자료를 소개하고 수학자의 일화와 실제 생활에 활용된 예를 들어줌으로써 학생들의 동기를 유발하는 것은, 일반적으로 널리 알려지고 또한 이미 이루어지고 있는 수학사를 활용한 수업이라 할 수 있다. 이와 같이 수학사 활용의 방법적인 측면에 대한 선행 연구 결과를 살펴보고자 한다.

백석윤은 수학사 지도 방법을 다음과 같이 제시했다.[11]

첫째, 단원 내용과 관련된 수학 용어나 수학자의 생애와 업적, 일화, 시대적 배경 등 역사적 연계성이나 입체감을 학생들이 느끼게 함으로써 흥미를 유발시킨다.

둘째, 수학사에 등장했던 문제들을 학생들에게 제시하여 직접 풀어보게 하거나, 교사가 과거의 풀이 방법을 비교 설명함으로써 극적인 경험을 하게 된다.

셋째, 과거 수학자들이 미래 사회에서 필요로 하는 수학적 내용에 대한 예견이나 그 예견이 현재 사회의 요구에 부합되고 있는 경우를 수학사에서 예를 들어 설명한다.

넷째, 그 밖의 다양한 수학사적 참고 자료들은 단순히 학생들의 주의환기나, 관심 집중을 위한 방법으로도 학습 현장에 이용될 수 있다.

다섯째, 이미 학습했거나 학습하게 될 수학 내용과 관련된 수학적 주제들의 목록을 제시하여 소위, 수학사 연대표를 학생들 스스로 만들어 보게 한다.

여섯째, 한 가지 문제에 대하여 수학사에 나오는 다양한 해결 방법을 소개하여 비교해 봄으로써, 문제 해결 능력의 증진과 수학이 단지 문제풀이라고만 생각하는 선입관을 해소시킬 수 있다. 또한 서로 다른 시대 및 장소에서 활동했던 사람들의 다양하고 창조적인 수학적 사고를 경험할 수 있는 기회를 제공한다.

허민은 실제 수업에서 수학사를 활용할 수 있는 예를 다음과 같이 제시하고 있다.[17]

첫째, 옛 문제의 활용

수학사는 수학 개념과 이론들이 제기된 문제를 해결하기 위해 구성되고 수정되며 확장되었음을 보여 준다. 그러므로 역사를 통해 수학 교수와 학습을 풍요롭게 하기 위한 좀 더 직접적인 접근 방법은 학생들로 하여금 옛 수학자들에게 흥미 있었던 몇 개의 문제를 풀어보게 하는 것이다. 이것은 수업의 일부로서 별도의 시간을 할애할 필요가 없이 가르치고 있는 주제와 관련된 역사적 문제를 소개하면 충분한 것이다.

둘째, 원전의 이용

수학의 고전과 수학에서 신기원을 이룩한 원전을 이용함으로써, 수학은 인간의 관여 없이 주어진 공리와 정리의 무미건조하고 고착된 체계가 아니라 인간의 계속

된 노력이며, 정리는 수학 세계의 신비를 풀기 위해 고심한 천재들의 노력의 결과라는 사실을 이해하게 한다.

4. 수학사 활용에서의 교사의 역할

그 동안 수학사는 다분히 서양의 역사로서만 인식되어 왔고, 또 수학에서 역사를 이용하는 것이 어렵게 생각되어져 수학사를 소홀히 여겨 왔지만, 이제는 수학의 이미지를 바꾸어 수학을 단순한 계산 과정이 아닌 인간의 활동으로 보아야 한다. 수학 교사는 수업에 수학사를 다루어 줌으로써 수학에 대한 형식적이고 독단적인 견해에 대항하여 수학이 실용적인 이유로 출발했던 하나의 창조적 인간 활동이라는 것을 학생들에게 보여 줄 수 있어야 한다. 따라서 교사들은 학습장애 요인들을 배제하기 위해 수학자들의 에피소드와 수학적 내용의 기원 등을 역사적으로 살펴본다거나 다양한 학습 자료를 동원하여 딱딱한 수학 학습의 이미지를 탈피할 수 있는 노력뿐 아니라, 학생들이 수학에 대한 친근감을 가지게 하여 수학을 탐구하도록 하는 계기를 마련해주는 교수·학습 방안을 강구해야 한다. 수학 교사도 수학을 가르치는 교사로서 뿐만 아니라 수학자로서, 시대적 흐름과 함께 요구되어지는 수학사나 수학자에게 관심을 가져야 할 것이며, 수학에서만이 가질 수 있는 특별한 지식을 갖도록 하여야 할 것이다.

수학을 가르치다 보면 발견자의 이름을 따서 불려지는 많은 이론이나 정의를 만나게 된다. 그러나 그의 개인적인 상황이나 수학사적인 내용 등에 대해 사전 지식이 없는 교사의 경우는 이에 대한 학생들의 궁금증을 풀어줄 수 없을 뿐만 아니라, 교사 스스로도 자신감을 잃게 되는 원인이 될 수도 있을 것이다. 이와 반대로 수학에 대한 다양한 지식을 갖고 있는 교사라면 학생들을 지도할 때 자신감이 생길 뿐만 아니라, 교사 자신의 마음에도 여유가 생겨 학생들에게도 무엇인가 특별한 면을 나타낼 수 있다.

그러나 실제로 많은 수학교사들이 수학사에 관한 책을 많이 읽거나 들어본 경험이 없는 상황이기 때문에 여러 가지 장점이 있음에도 불구하고 수학사에 대한 교

육이 필요하다고 느끼고 있으면서도 수학사 도입이 제대로 이루어지지 못하고 있음을 알 수 있다.

따라서 수학 교사는 수학사에 대한 깊이 있는 교재 연구를 통해서 수학적인 인물들의 개인적인 생애나 시대적 상황, 이론의 발견 시기 또는 수학자들 사이의 스승과 제자 관계 등 보다 정확하고 깊이 있는 수학사적인 내용을 제시할 필요가 있다.[14]

'수학의 역사적 기원을 안다'는 것이 교사에게 미치는 유용성은 상당한 것으로 교사 자신에게 새로운 지식과 수학에 대한 인식을 바꾸게 해줄 뿐 아니라 교사에게 교육적인 아이디어 개발에 통찰을 제공함으로써 교사의 열의를 고무시키고 활기 있게 만들 수 있을 것이다. 물론 수학 학습지도에서의 수학사의 이용은 보조적인 것이며, 수학교사가 수학 시간에 수학사를 지도하라는 것은 아니다. 수학의 역사는 학습자에게 실질적인 도움을 줄 수 있는 정도로만 다루어져야 한다.[3]

제 3 장 미적분학의 수학사적 배경

이 장은 김용운, 양영오, 이우영의 저서를 기초로 미적분학의 수학사적 내용을 요약한 것이다.[1, 6, 7]

1. 적분학

현행 교과과정에서 미분을 먼저 시작하고 다음에 적분을 공부하는 관습적인 순서와는 반대로, 적분학의 착상이 역사적으로 미분학보다 먼저 발달되었다는 것은 흥미로운 사실이다. 적분학의 착상은 어떤 도형의 넓이나 부피, 호의 길이 따위를 구하는 것과 관련한 합의 과정에서 처음 이루어졌다. 적분의 아이디어를 가지고 있었던 대표적인 수학자로 그 유명한 Archimedes를 들 수 있다. 이 절에서는 적분개념의 기원과 Archimedes, Kepler, Cavalieri의 아이디어를 알아보고자 한다.

1) 적분개념의 기원

미적분학의 역사 속에서 발생된 첫 번째 문제는 넓이, 부피, 호의 길이의 계산과 관련된 것이었다. 원의 넓이를 구하는 문제에 대한 최초의 공헌 중의 하나는 Antiphon[1)]의 업적이다. Antiphon의 대담한 주장은 그리스의 실진법(method of exhaustion)의 싹을 배태시켰다.

실진법은 흔히 Eudoxus(기원전 370년경)가 Zenon[2)]의 역설[3)]에 대한 대응으로 고

---

1) Antiphon(기원전 430년경)은 원의 넓이를 구하는 문제에서 한 원에 내접한 정다각형의 변의 수를 계속 두 배해 나감으로써 그 원과 다각형 사이의 넓이의 차를 궁극적으로 없앨 수 있다고 생각하여, 어떤 주어진 다각형과 넓이가 같은 정사각형을 만들어낼 수 있기 때문에 결국 원과 같은 넓이를 가진 정사각형도 만들 수 있을 것이라고 주장했다.

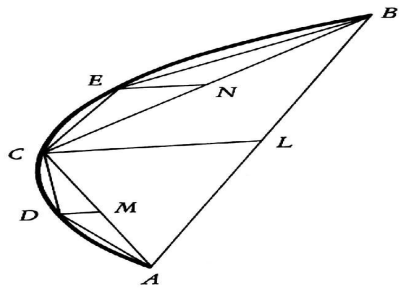
2) Zenon(기원전 490?~430?)은 그리스 엘레아학파의 철학자이고 파르메니데스의 제자인데 스승인 파르메니데스를 변호하기 위해 이분법, 화살, 아킬레스와 거북이 등의 많은 역설을 만들어 내는데, 그 속에는 당시에는 매우 애매했던 무한과 연속, 극한 등의 중요한 개념이 내포되어 있어 플라톤 학파와의 격렬한 논쟁을 일으킨다.

3) Zenon의 선분의 무한 연속에 반대하는 역설로서 이분법(The Dichotomy), 화살(The Arrow), 아킬레스와

안한 것으로 알려져 있다. 이 방법은 양의 무한가분성을 가정한 후 다음과 같은 명제를 기초로 하고 있다. '만일 어떤 양으로부터 절반 이상의 부분을 빼내고 다시 나머지 부분으로부터 절반 이상의 부분을 빼내는 과정을 계속할 경우 결국 어떤 정해진 양보다도 작은 양만 남을 수 있다.'

실진법은 복잡하고 불규칙적인 기하학적 도형의 넓이나 부피를 직접 구할 때 사용할 수 있는 일종의 수학적 기교이다. 즉 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하고자 할 때 넓이를 잘 알고 있는 단순한 다각형부터 시작하여 점점 더 주어진 도형에 가까운 다각형으로 변형해감으로써 주어진 도형의 넓이에 계속 근접시켜가는 방법이다. 이 방법은 일단 하나의 식이 알려지면 이를 입증하기 위한 엄밀한 도구는 될 수 있으나, 어떤 도구를 발견하는 데는 무의미하다. 실진법을 적극 사용하고 발전시킨 학자는 Archimedes이다.

Archimedes는 오늘날의 적분 개념에 가장 근접하게 활용하여 곡선으로 둘러싸인 평면도형의 면적을 성공적으로 계산해낸 적분법의 선구자였다. 그 예로 Archimedes가 포물선 영역의 면적을 구하는 과정을 알아보고자 한다.



(그림 3-1) 포물선 부분의 구적법

거북이의 역설이 있다.

· 이분법 : 만일 직선을 무한히 쪼갤 수 있다면 운동은 불가능하다. 왜냐하면 직선을 통과하려면 우선 중점을 지나야만 하고 그러기 위해서는 사분점을 지나야하고 또 그러기 위해서는 팔분점을 지나야만 하는 등 무한히 많은 점을 지나야 한다. 따라서 운동은 시작조차도 할 수 없다.

· 화살 : 만약 시간이 더 이상 쪼개질 수 없는 아주 짧은 순간들로 이루어져 있다면 움직이는 화살은 항상 정지해 있다. 왜냐하면 매 순간마다 그 화살은 한 고정된 지점에 있기 때문이다. 각 순간에서 이 명제가 참이므로 화살은 결코 움직이지 않는다.

· 아킬레스와 거북이 : 아킬레스는 거북이를 따라 잡을 수가 없다. 왜냐하면, 아킬레스가 거북이가 있던 곳까지 왔을 때는 거북이는 얼마간 전진하고 있다. 다음에 아킬레스가 다시 그때 거북이가 있던 곳까지 왔을 때는, 거북이는 또 얼마간 전진하고 있다. 따라서 아킬레스는 거북이를 따라잡을 수가 없다.

점 C, D, E를 선분 AB, CA, CB 의 중점을 지나고 포물선의 축에 평행한 선분 LC, MD, NE를 그어 얻는 포물선의 호 위의 점이라 하자. 포물선의 기하학적 성질로부터 Archimedes는 다음이 성립함을 밝혔다.

$$\triangle CDA + \triangle CEB = \frac{\triangle ACB}{4}$$

이 착상을 반복하여 적용하면 포물선의 부분의 면적은 다음과 같다.

$$\triangle ABC + \frac{\triangle ABC}{4} + \frac{\triangle ABC}{4^2} + \frac{\triangle ABC}{4^3} + \cdots$$

$$= \triangle ABC\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\right)$$

$$= \frac{4}{3}\triangle ABC$$

기하급수의 합의 극한을 취함으로써 계산을 간략히 하였는데 Archimedes는 실진법을 반복하여 사용하였다. Archimedes는 어떤 면적이나 체적을 다루면서 우리의 기초 미적분 교과서에서 볼 수 있는 수많은 정적분과 동등한 것에 도달하였다.

2) Archimedes의 평형법

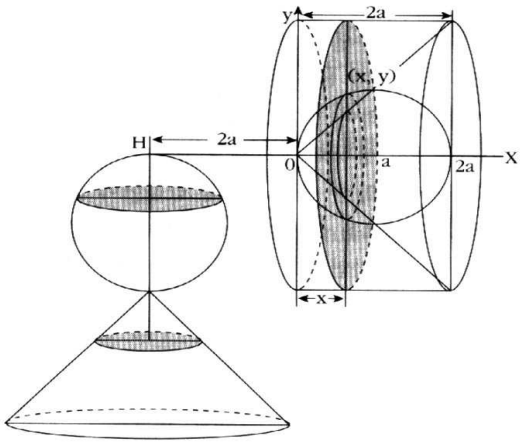
Archimedes는 실진법에서 더 나아가 구적법의 결과를 발견하기 위한 방법으로 평형법을 사용하였다. 평형법의 기본적인 착상은 다음과 같다. 주어진 도형의 넓이 또는 부피를 구하기 위해서는 먼저 이것을 매우 많은 얇고 평행한 가로 평면 또는 세로 평면(층)으로 자르고(마음속으로) 그 조각을 넓이와 무게 중심을 이미 알고 있는 도형과 평형을 이루도록 주어진 지레의 한 끝에 매단다. 구의 부피를 구하는 공식을 찾는데 활용함으로써, 이 방법은 제대로 이해될 수 있을 것이다.

중심이 $(a, 0)$인 원

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

을 정리하면 다음과 같이 된다.

$$x^2 + y^2 = 2ax$$



(그림 3-2) 평형법에 의한 구의 부피 측정

의 양변에 π를 곱하면,

$$\pi x^2 + \pi y^2 = \pi 2ax \qquad (1)$$

여기서, $\pi x^2, \pi y^2$ 은 각각 위의 원과 직선 $y = x$를 x축 둘레로 회전시켰을 때 생기는 구의 원뿔의 단면의 넓이이다.

(1)식의 양변에 $2a$를 곱하면

$$2a(\pi x^2 + \pi y^2) = x\pi(2a)^2 \qquad (2)$$

여기서 $\pi(2a)^2$ 은 밑면의 반지름의 길이가 $2a$, 높이가 x인 원기둥의 단면의 넓이를 나타내고 있다. 원기둥은 그대로 두고 구와 원뿔을 원점에서 $-2a$의 거리에 x축에 수직으로 매어 단 것으로 생각하면, (2)식은 원점에서 $2a$의 거리에 있는 구와 원뿔의 단면의 넓이와 원점에서 x의 거리에 있는 원기둥의 단면의 넓이가 지레의 원리에 의하여 균형을 이루고 있는 것으로 해석할 수 있다.

x를 0으로부터 $2a$까지 변화시키면, 이들 단면은 각각 구, 원뿔, 원기둥을 채우게 된다. 구의 부피를 V 라고 하면, 원뿔의 부피를 구하는 공식은 이미 알려져 있었으므로, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

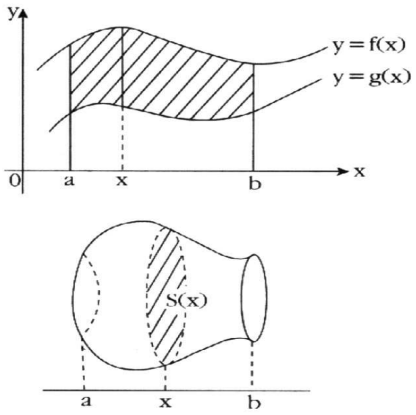
$$2a\left(V+\frac{\pi(2a)^2 2a}{3}\right)=a\pi(2a)^2 2a \qquad (3)$$

이 식으로부터 구의 부피를 구하는 공식

$$V=\frac{4\pi a^2}{3}$$

이 나온다.

이러한 사고 과정은 추측이고 증명은 아니지만 결과가 참일 것이라는 예측을 강력하게 암시한다. (2)식으로부터 (3)식으로의 이행은 무한소 양으로부터 전체 양으로, 곧 미분으로부터 적분으로의 이행이며, 이는 다름 아닌 정적분이란 위대한 아이디어의 착상인 것이다.



(그림 3-3) 곡선 사이의 넓이와 부피

정적분 지도에서 곡선 사이의 넓이를 구하는 공식

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

와 입체의 부피를 구하는 공식

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

를 다루고 있다. 이는 각각 선분(곧, 무한소 넓이)과 평면 영역(곧, 무한소 부피)의

무한합으로 넓이와 부피를 연상하게 하는데, 정적분의 역사적 근원이 Archimedes의 무한소 계산법에 있음을 보여주는 것은 이러한 정적분의 직관적 이해에 도움을 줄 것이다.[4]

3) Kepler의 포도주 통의 부피 측정

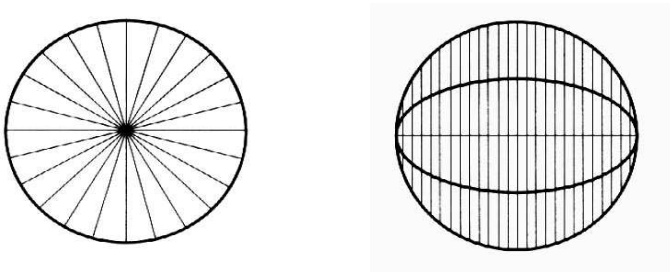
Kepler는 미적분학의 선구자 중의 한 사람이다. 행성운동의 두 번째 법칙[4)]에 포함된 넓이 문제를 다룰 때, 태양과 궤도 위의 서로 무한히 가까운 두 점을 꼭지점으로 하는 무한히 작은 삼각형들이 넓이를 이룬다고 생각하였다. 이렇게 하여 하나의 적분법을 사용하였는데, 예를 들어 (그림 3-4)의 왼쪽 그림과 같이 원의 중심을 꼭지점으로 하는 무한히 가늘고 긴 삼각형의 높이가 반지름과 같아진다는 점을 이용하여 원의 넓이를 구하였다. 즉, 원둘레 위에 있는 무한히 작은 밑변을 각각 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$이라 하면, 원의 둘레 $l = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$이고 이 때 원의 넓이 S는 작은 삼각형의 넓이의 합으로써 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a_1 r + \frac{1}{2}a_2 r + \cdots + \frac{1}{2}a_n r + \cdots \\ &= \frac{1}{2}r(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots) \\ &= \frac{1}{2}rl \end{aligned}$$

이것은 이미 Archimedes가 더 상세하게 증명했던 고대의 유명한 계산이다. Kepler는 같은 논법으로 타원의 넓이도 구했는데 당시에 아직 알려지지 않았지만 역시 Archimedes가 이미 얻은 결론이었다. 즉 (그림 3-4)의 오른쪽 그림에서 보듯이, 타원은 반지름 a인 원의 각 세로선의 길이를 주어진 비, 예를 들면 $b:a$의 비로 축소함으로써 얻을 수 있다고 보았다. 이 아이디어는 Cavalieri의 원리에 따른 타원의 넓이 구하는 과정에서 자세히 살펴보고자 한다.

---

4) 행성과 태양을 연결하는 동경은 같은 시간에 같은 넓이를 지난다.



(그림 3-4) Kepler의 원과 타원의 넓이

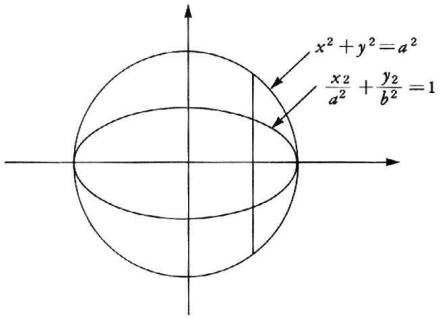
또한 Kepler는 <포도주 통의 용적 측정, 1615>에서 한 축의 둘레로 원추곡선의 호를 회전시켜 얻어진 93개의 입체의 부피를 구하는 데에 초기의 적분과정을 이용하였다. Kepler는 당시 포도주 검량 관들이 사용하던 다소 어설픈 방법을 목격하면서 포도주 통의 용적 문제에 관심을 갖게 되었고 그 방법은 다음과 같다. 포도주 통을 얇은 두께의 수없이 많은 원판이 겹쳐서 생긴 것으로 생각했으나 얇은 원판의 부피를 계산하는 것은 단순하지가 않았다. 극단적으로 얇으면 높이가 0이며, 부피도 0이다. 0의 부피는 아무리 많이 더해보았자 결국 0이라는 결과가 나온다. 그러나 두께가 0이 아닌 것으로 간주하면 얇을수록 그들의 합은 전체 부피에 접근한다는 사실이 바로 적분법의 발상이다. 적분이란 '대상을 얇은 폭' 또는 낮은 높이로 나눈 뒤 그들의 총합으로 넓이 또는 부피를 계산하는 방법이다. 미분이 극단적으로 짧은 시간 안의 속도 계산이라면, 적분은 극단적으로 짧은 시간 안의 속도로 달린 거리의 총합이라 할 수 있다.

4) Cavalieri의 불가분량법

Kepler의 행성의 타원궤도의 계산에서의 적분의 발상을 한층 발전시킨 사람이 Cavalieri이다. Cavalieri는 1635년에 미적분법의 전신이라 할 수 있는 불가분량을 소개한 논문 <불가분량의 기하학, Geometria indivisible>을 발표하였다. 이것은 무한소에 관한 논문으로 Cavalieri는 다음과 같은 원리를 사용하였다.

1. 만일 두 평면 도형이 한 쌍의 평행선 사이에 들어있고, 이 직선과 평행한 임의의 직선 위의 그것에 의해 잘린 두 선분이 항상 어떤 주어진 비율이면 이 두 평면도형의 넓이의 비율도 그와 같다.
2. 만일 두 입체도형이 한 쌍의 평행한 평면 사이에 들어 있고 평면과 평행한 임의의 평면 위의 그것에 의해 잘린 두 단면의 넓이가 항상 어떤 주어진 비율이면 두 입체도형의 체적의 비율도 그와 같다.

Cavalieri의 원리는 기하학적 도형은 넓이 또는 부피의 무한히 많은 '원자'로 이루어져 있고, 이것들을 더하면 원하는 넓이 또는 부피를 구할 수 있다는 것이다. 그것들의 직관적인 기저는 현대 적분법으로 쉽고 정밀하게 만들어질 수 있다. 이 원리를 직관적으로 명백하다고 받아들인다면 보다 많은 구적 문제를 풀 수 있다. Cavalieri의원리를 어떻게 이용하는지 알아보기 위해 먼저 장축과 단축이 a, b 인 타원의 넓이를 구하고 나서 반지름이 r인 구의 부피를 구하여 보자.



(그림 3-5) Cavalieri의 타원의 넓이

동일한 직교좌표 평면에 그려진 타원과 원을 살펴보자.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b), \qquad x^2+y^2=a^2$$

위의 각 방정식을 y에 관하여 풀면, 각각 다음과 같다.

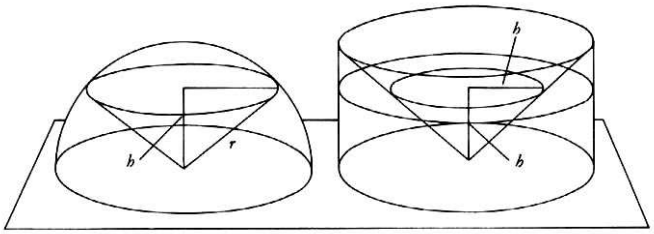
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

따라서 타원과 원의 대응하는 y좌표는 $\frac{b}{a}$의 비율이다. 그러므로 타원과 원의 대응하는 수직 방향의 현도 이 비율이므로 Cavalieri의 첫 번째 원리에 의하여 타원과 원의 넓이는 이 비율이다. 결과적으로 다음을 얻게 된다.

$$\text{타원의 넓이} = \frac{b}{a}(\text{원의 넓이})$$

$$= \frac{b}{a}(\pi a^2) = \pi ab$$

이것은 근본적으로 Kepler가 장·단축이 a, b 인 타원의 넓이를 구하는 데 사용한 과정이다.



(그림 3-6) 타원의 넓이를 통한 구의 부피 측정

이제 반지름이 r인 구의 부피를 구하는 잘 알려진 공식을 찾아보자. 그림(3-6)에서 왼쪽 그림은 반지름이 r인 반구이고, 오른쪽 그림은 반지름이 r이고 높이가 r인 원기둥에서 밑면이 원기둥의 윗면이면서 꼭지점이 원기둥의 밑면의 중심인 원뿔을 제거한 것이다. 이 반구와 속이 파인 원기둥은 동일한 평면상에 놓여 있다. 이제 이 두 입체 모두를 밑면과 평행하고 밑면으로부터 b만큼 떨어진 평면으로 잘라보자. 이 평면에 의해 잘린 입체도형의 단면은 원이고, 다른 입체도형의 단면은 반지 모양이다. 기초 기하학 식으로 두 단면의 넓이는 모두 $\pi(r^2 - b^2)$임을 쉽게 보일 수 있다. 따라서 Cavalieri의 원리에 의하여 두 입체 도형은 같은 부피를 갖는다.

그러므로 구의 체적 V는 다음과 같다.

$$V = 2 \times (\text{원기둥의 부피} - \text{원뿔의 부피})$$

$$= 2\left(\pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3}\right) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

이 Cavalieri의 두 번째 원리를 가정하고 이를 일관되게 사용하면 입체기하학을 다룰 때 부딪치는 많은 부피 공식을 매우 간단하게 유도할 수 있다. 이 방법은 많은 교과서 집필자에 의해 채택되어 왔으며 교육적 측면에서 옹호되어 왔다.

2. 미분학

1) 미분개념의 기원

미분법을 최초로 명확하게 예상한 것은 1629년 Fermat가 설명한 착상이라고 한다. Kepler는 함수의 증분은 보통의 극대 또는 극소 근방에서는 무한소가 된다는 것을 알게 되었다. Fermat가 이 사실을 극대값, 극소값을 결정하는 방법으로 변형시켰다. 간략하게 이 방법을 고찰해 보자.

$f(x)$가 x에서 보통의 극대값 또는 극소값을 갖고 e가 매우 작다면 $f(x-e)$의 값은 거의 $f(x)$의 값과 같다. 그러므로 시험적으로 $f(x-e)=f(x)$ 이라 놓고 나서 e가 0의 값을 갖게 함으로써 이 등식을 참이 되게 만든다. 그 결과로 생기는 등식의 근이 $f(x)$가 극대값 또는 극소값을 갖는 x의 값이 된다.

이제 어떤 양을 곱이 최대가 되는 두 부분으로 나누는 것을 고찰함으로써 위의 방법을 예증해 보자. Fermat는 Viète[5)]의 표기법을 사용했는데 거기에서 상수는 대문자 자음으로, 변수는 대문자 모음으로 표기했다. 이 표기법에 의해서 B를 주어진 양이라 하고, 구하려는 부분을 A와 $B-A$로 나타내어, $(A-E)(B-(A-E))$를

5) François Viète(1540~1603)는 16세기의 가장 위대한 프랑스 수학자로서 삼각법, 대수, 기하학 등에 관하여 많은 저술을 하였다. Viète의 가장 유명한 책인 《해석학 서설》은 기호대수의 발전에 커다란 기여를 하였는데, 이 책에 미지량을 나타낼 때는 모음을, 기지량을 나타낼 때는 자음을 이용하는 예가 나와 있고, 또한 동일한 문자에 적당한 조건을 붙여서 멱을 표현하는 방법이 나와 있다.

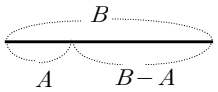
$A(B-A)$와 같다고 하면 다음과 같다.

$$A(B-A)=(A-E)(B-A+E)$$

$$2AE-BE-E^2=0$$

양변을 E로 나누면 다음을 얻는다.

$$2A-B-E=0$$



(그림 3-7) 최대 분할

$E=0$으로 놓으면 $2A=B$를 얻고, 결국 구하는 분할을 얻는다. Fermat의 설명의 논리가 완전무결하지는 않지만 그의 방법은,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$

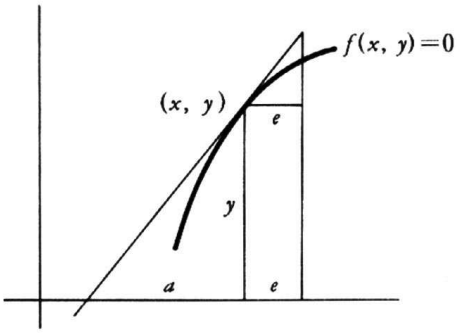
으로 놓는 것, 즉 $f(x)$의 도함수는 0과 같게 놓는 것과 같다는 사실이 밝혀졌다. 이것은 함수 $f(x)$의 극대, 극소를 구하는 관습적인 방법이며 때때로 기초 교과서에서 Fermat의 방법이라고 불리기도 한다. 그러나 Fermat는 $f(x)$의 도함수가 0에 접근하는 것이 보통의 극대값, 극소값을 구하기 위한 충분조건은 아니고 필요조건일 뿐이라는 것을 알지 못하였다. 또한 Fermat의 방법은 극대값과 극소값을 구별하지 못하였다.

Fermat는 또한 방정식으로부터 주어진 곡선의 한 점에서의 접선을 구하는 일반적인 방법을 고안하였다. 그의 생각은 그 점에 대한 접선영(subtangent), 즉 x축 상의 접점에서 내린 수선의 발과 접선이 x축과 만나는 점 사이의 선분을 찾는 것이다. 이 방법은 접선을 곡선과의 교점이 일치하려 할 때 할선의 극한으로서 생각하는 개념을 사용한다. 현대적 표기법을 사용하면 다음과 같다. 방정식을 $f(x,y)=0$으로 하고, 점 (x,y)에 대한 곡선의 접선영 a를 구해보자. 삼각형의 닮음을 이용하면 접선 위의 근접점의 좌표는 $(x+e, y(1+a/e))$임을 쉽게 알 수 있다. 이 점을 실험적으로 곡선 위에 있는 것처럼 취급하면,

$$f(x+e, y(1+e/a))=0$$

을 얻는다. 그러면 등호는 e가 0값을 갖게 함으로써 참이 된다. 그리고 접점의 x, y좌표로 나타난 방정식을 풀어 접선영 a를 구한다. Fermat는 이와 같은 방법을

이용하여 타원, 사이클로이드, 시소이드, 콘코이드, 쿼드라트릭스와 데카르트의 엽선을 구했다.



(그림 3-8) 접선영

데카르트의 엽선,

$$x^3 + y^3 = nxy$$

위의 임의의 점에서의 접선영을 찾음으로써 그 방법을 예증하여 보자. 위의 식에서 다음을 얻는다.

$$(x+e)^3 + y^3\left(1+\frac{e}{a}\right)^3 - ny(x+e)\left(1+\frac{e}{a}\right) = 0$$

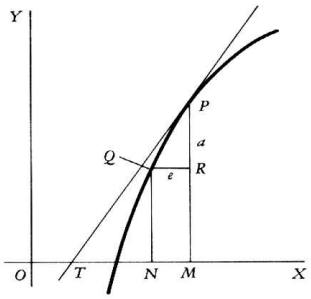
또는,

$$e\,(3x^2 + \frac{3y^3}{a} - \frac{nxy}{a} - ny) + e^2\,(3x + \frac{3y^3}{a^2} - \frac{ny}{a}) + e^3\,(1 + \frac{y^3}{a^3}) = 0$$

이제 e로 나누고, $e = 0$으로 놓으면 다음을 얻는다.

$$a = -\frac{3y^3 - nxy}{3y^2 - ny}$$

또한, 미분법을 예견하는데 중요한 역할을 했던 또 다른 사람은 영국의 수학자 Barrow이다. Barrow의 가장 중요한 업적은 그의 저서 《광학과 기하학 강의, Lectiones opticae et geometricae》인데, 이 책 내용 중에는 미소삼각형(differential triangle)을 사용하고 있는 현대 미분과정과 매우 비슷한 접근방법이 나와 있다.



(그림 3-9) Barrow의 곡선의 접선 구하기

(그림 3-9)와 같이 주어진 곡선 위의 한 점 P에서의 접선을 구하고자 한다. Q를 곡선 위의 근접점이라 할 때, 삼각형 PTM과 삼각형 PQR은 서로 닮았고, Barrow는 작은 삼각형이 무한히 작아짐에 따라 다음과 같은 등식을 얻게 된다고 주장하였다.

$$\frac{RP}{QR} = \frac{MP}{TM}$$

이 때, $QR = e,\ RP = a$라 놓으면, 점 $P(x, y)$에 대하여 점 Q의 좌표는 $(x - e, y - e)$가 된다. 이 값들을 곡선의 방정식에 대입하고 e와 a의 2차 이상인 항을 무시한다면 비율 $\frac{a}{e}$를 얻는다. 따라서 다음과 같은 식

$$OT = OM - TM = OM - MP\left(\frac{QR}{RP}\right) = x - y\left(\frac{e}{a}\right)$$

가 성립하고 접선이 결정된다. Barrow는 여러 곡선의 접선을 작도하는 데 이 방법을 응용하였는데, 여기에서는 '특수한 라메(Lamé) 곡선'이라 이름 붙여진 곡선 $x^3 + y^3 = r^3$에 적용하여 보자.

$$(x - e)^3 + (y - a)^3 = r^3$$

$$x^3 - 3x^2e + 3xe^2 - e^3 + y^3 - 3y^3a + 3ya^2 - a^3 = r^3$$

e와 a의 2차 이상인 항을 무시하고 또한 $x^3 + y^3 = r^3$임을 이용하면, 이 식은

$$3x^2e + 3y^2a = 0$$

으로 변형되고, 다음을 얻는다.

$$\frac{a}{e} = -\frac{x^2}{y^2}$$

물론 비율 $\frac{a}{e}$는 현대의 $\frac{dy}{dx}$이며, Barrow의 방법에서 다소 불충분한 과정은 극한 이론을 사용해서 엄밀하게 만들 수 있다.

2) 무한소의 개념

미적분학의 논리적 기초가 되는 또 하나의 원칙적인 생각은 일반적인 극한개념의 응용이라는 것이다. 미분계수는 변수의 증분과 그에 대응하는 함수의 증분과의 몫이 극한을 가질 때 그러한 극한값으로서 정의되며, 정적분은 상합과 하합의 극한값으로 정의된다. 예를 들면 기호 Δ에 관하여 d는 극한의 의미가 부여되어 있으며 Sum을 뜻하는 $\int$ 도 무한소량의 합의 뜻으로서 극한의 의미를 암시하고 있는 것이다. 미적분학의 초기 발견 당시 혼란스럽게 한 무한소의 개념에 대해 알아보고자 한다.

도함수의 본질은 Newton이 그랬던 것처럼 속도를 써서 생각하면 가장 이해하기 쉬울 것이다. 만약 어떤 물체가 4초 동안 200피트를 간다면 그것은 초당 50피트의 평균속도로 움직인다고 말할 수 있다. 그리고 그 물체가 일정한 속도로 움직인다면 그 평균속도는 4초 동안의 각 순간의 속도가 된다. 그러나 대부분의 운동은 일정한 속도를 갖지 않는다. 지상으로부터 떨어지는 물체, 총에서 발사된 탄환, 태양의 주위를 도는 행성은 연속적으로 변화하는 속도를 가지고 운동한다. 많은 경우에 있어 운동하는 동안 어떤 순간의 속도를 알아야 할 필요가 있다. 예를 들면, 탄환이 사람을 때리는 순간의 속도는 치명적이다. 만약 그 속도가 초당 0미터라면 탄환은 땅에 떨어지고, 초당 1000미터라면 사람이 죽을 수도 있다. 한 순간이라는 의미 자체

는 시간의 경과량이 0이다. 시간의 경과가 0이면 그 물체가 움직인 거리도 0이다. 그래서 평균속도를 구할 때처럼 거리를 시간으로 나누어 순간속도를 구하려고 한다면 $\frac{0}{0}$이 되어 의미가 없다.

이와 같은 난관을 17세기 수학자들은 암암리에 알고 있었으나 확실히는 몰랐으며, 그것을 타개하는데 다음과 같이 하였을 것이다. 한 물체가 땅으로 떨어지는데 낙하 4초 후의 순간속도를 알고자 한다고 가정해 보자. 어떤 순간 대신에 낙하하는 시간의 어떤 구간을 생각하고, 그 구간 동안의 낙하 거리를 시간으로 나눔으로써 평균속도를 구할 수 있다. 다시 말해서 다음과 같은 경우의 값을 구할 수 있다.

ⓐ 낙하 4초 후부터 1/2초가 경과한 동안의 평균속도
ⓑ 낙하 4초 후부터 1/4초가 경과한 동안의 평균속도
ⓒ 낙하 4초 후부터 1/8초가 경과한 동안의 평균속도

구간이 짧아질수록 그 평균속도는 4초 후의 순간속도와 가까워진다. 각각의 값들을 알아서 어떤 값에 접근하는가를 알면 구하려는 4초 후의 순간속도에 가까워진다는 것을 알게 된다.

Fermat가 도함수를 구해내는 과정은 다음과 같다.

$d = 16t^2$으로 표현되는 낙하운동을 하는 공의 4초 후의 속도를 구해보자. $t = 4$일 때 $d = 16 \cdot 4^2 = 256$이다. h를 시간의 증분이라 하면, 공은 $4 + h$초 동안에 $256 + k$만큼 낙하할 것이며, 여기에서 k는 거리의 증분이다. 그러므로

$$256 + k = 16\,(4 + h\,)^2 = 16\,(16 + 8h + h^2\,)$$

$$256 + k = 256 + 128h + h^2$$

$$\frac{k}{h} = \frac{128h + h^2}{h}$$

$$\frac{k}{h} = 128 + h$$

라는 식을 얻을 수 있다. 그 다음에 Fermat는 $h=0$으로 놓음으로써 낙하 4초 후의 순간속도로서 $\dot{d}=128$을 얻었다($\dot{d}$는 Newton에 의한 기호이다). 결국 $\dot{d}$가 $t=4$일 때의 $d=16t^2$의 도함수의 값이다.

이 방정식에서의 문제점은 0이 아닌 h로 시작해서 분자, 분모를 h로 나누는 시행을 했는데 이것은 h가 0이 아닐 때에만 옳은 것이다. Fermat는 자신이 얻은 결과를 정당화시키지 못했으며 이 같은 방법을 계속 연구하지는 않았다.

Newton 또한 무한소의 개념에 관해 논리적 정당화가 불분명했다. 그는 Fermat가 위에서 $h=0$이라고 나타낸 것을 비판했다. 왜냐 하면, 그는 말하기를 "수학에서는 미세한 오차라도 무시될 수 없기 때문이다." 라고 하였다. 《프린키피아, Principia》의 초판과 제 3 판에서 Newton은 다음과 같이 말하였다.

"무한히 작아지는 양의 궁극적인 비는 엄격히 말해서, 궁극적인 양의 비가 다가가는 극한이며, 주어진 어떠한 차이보다 가깝게 접근하기는 하나, 그 양들이 무한히 작아지기 전에 그 극한을 지나치지도 않고 거기에 도달할 수도 없다"[8]

정적분의 경우에 있어서도 상황은 비슷했다. 어떤 도형이 전체적으로 또는 부분적으로 곡선으로 둘러싸인 것일 때 그 넓이를 계산할 때, 곡면으로 둘러싸인 부피를 계산할 때 있어서 내접 또는 외접하는 사각형의 구간을 무한히 작게 하면, 그 부피나 넓이는 참값에 가까워진다. 직관적으로 생각하여도 직사각형의 개수가 많아질수록 그들 넓이의 합이 구하려는 곡선도형의 넓이에 더 가까워짐이 분명하다. 그러나 n등분 했을 때 n을 무한히 크게 했을 때의 무한이라는 개념이 명확하지가 않았다.

앞에서 살펴본 넓이와 부피를 구한 Eudoxus의 Cavalieri의 불가분량법은 많은 학자들에게 영향을 주었고, 이 불가분량법은 모호한 사고의 전형적인 예였다. Cavalieri는 넓이를 무한히 많은 불가분량(indivisible)이라 불리는 단위들의 합이라고 보았는데 이때의 불가분량은 아마도 선이라고 볼 수 있겠다. 그러나 Cavalieri는 불가분량이 정확히 무엇인지는 분명하게 밝히지는 못했고, 다만 넓이를 무한히 작은 직사각형들로 나눈다면 불가분량에 도달한다고 했을 뿐이다. Cavalieri는 어떻게

무한히 많은 원소, 즉 불가분량들이 유한한 크기의 물체를 구성하고 있는지를 설명할 수 없었기 때문에 그의 불가분량에 대한 해석을 거부함으로써 답을 회피했다. 또한 그의 방법이 복잡한 그리스의 실진법을 피하는 실용적인 도구라고 주장하였다.

3) Newton의 유율법

Newton은 적분의 개념에는 별로 공헌한 바는 없지만 도함수는 광범위하게 이용하였다. 도함수를 이끌어내는 방법은 근본적으로 Fermat의 것이었다. 그는 미적분학에 관한 세 편의 논문을 썼으며, 그의 걸작 《프린키피아, Principia》를 출간하였다.

Newton의 주된 관심사는 물리학이었다. 특히, 그는 행성의 운동에 관심이 많았다. Newton은 시간 t에 따라 변하는 (반지름을 위한) 거리 r, 이를테면, $r = t^2$을 고려했다. 그는 주어진 함수, 변하는 양을 유량, 변량(fluent)이라 하였고, 그것의 변화 비율을 유율(fluxion)이라 하였다. 그리고 유율을 $\dot{r}$로 나타내었다. 그는 $\dot{r}$를 일종의 속력, 또는 속도(즉, 거리의 변화율)로 나타내었다. 0에 가까워지지만 0은 아닌 작은 양을 기호 o으로 나타내었다.

1671년에 작성된 Newton의 논문 <유율법과 무한급수>에 있는 한 예를 살펴보자. 삼차곡선이

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

일 때, 위 식에 x, y 대신 $x + \dot{x}o, y + \dot{y}o$을 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & x^3 + 3x^2(\dot{x}o) + 3x(\dot{x}o)^2 + (\dot{x}o)^3 - ax^2 - 2ax(\dot{x}o) \\ & - a(\dot{x}o)^2 + axy + ay(\dot{x}o) + a(\dot{x}o)(\dot{y}o) + ax(\dot{y}o) \\ & - y^3 - 3y^2(\dot{y}o) - 3y(\dot{y}o)^2 - (\dot{y}o)^3 = 0 \end{aligned}$$

위 식을 간단히 정리하여, 남은 항들은 o으로 나눈다. 다음에는 2차 이상의 지수를 가진 o을 포함하는 모든 항을 제거하면 다음을 얻는다.

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$$

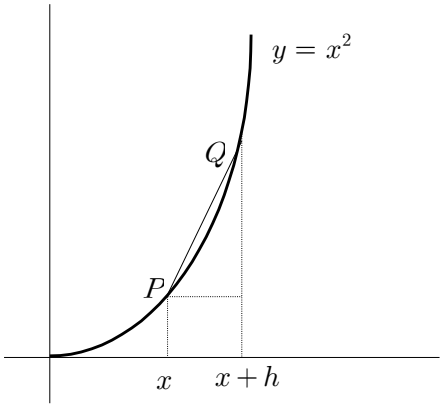
Newton은 두 가지의 유형을 고찰했다. 첫째 유형은 몇 개의 변량에 관련된 관계식이 주어지고, 이 변량과 그들의 유율과 관련된 관계식을 찾는 문제이다. 이것은 위에서 했던 것이고, 미분에 해당한다. 두 번째 유형은 몇 개의 변량과 그들의 유율에 관련된 관계식이 주어지고 변량에만 관련된 계산식을 찾는 문제이다. 이것은 역산 문제이고, 미분방정식을 푸는 것에 해당한다. 2차 이상의 지수를 가진 o을 무시하는 생각은 후에 Newton이 원시 극한개념을 써서 정당화하였다. Newton은 유율법을 수없이 그리고 놀랄 만큼 응용하였다. 극대와 극소, 곡선의 접선, 곡선의 곡률, 변곡점, 곡선의 요철 등을 결정하고, 그의 이론은 수많은 구적법과 곡선의 길이를 구하는 문제에 적용하였다. 미분방정식을 적분하는데 있어서도 비상한 능력을 나타내었다. 대수적 또는 초월적 수치 방정식 모두에서 실근을 근사적으로 찾는 작업도 또한 이 방법에 포함된다.

4) Leibniz의 미분학

Leibniz의 미적분학에 대한 접근법은 Newton과 다소 달랐다. 그는 기호 x의 값의 작은 차이를 나타내는 dx 그리고 y의 값의 작은 차이를 나타내는 dy를 사용하였다. 그는 기울기 함수를 $\frac{dy}{dx}$로 나타내었는데, 이 기호는 두 개의 작은 증분의 비를 분명하게 암시한다. 그는 곡선의 기울기를 찾는 기하학적인 문제로서 이 주제에 접근하였다. 함수의 변화율, 즉 x에 관한 y의 변화율을 구하는 것이란 곡선의 기울기를 찾는 것이라고 생각하였다(즉, 기울기는 얼마나 가파른가?). 그러나 기울기가 일정하지 않다는 사실이 어려운 점이다. 어떤 점에서 곡선은 상당히 가파르게 올라가고, 다른 점에서는 곡선이 거의 수평을 이룰 수도 있다. 또 다른 점에서는 곡선이 상당히 가파르게 내려갈 수도 있는 것이다. $y = x^2$의 함수를 생각해 보자.

x가 증가함에 따라 곡선은 더 높이 올라갈 뿐만 아니라 더욱더 가파르게 움직인

다. x의 임의의 값이 주어져있을 때, x의 값에 대한 기울기를 계산하기 위해서는 x에 대한 곡선의 높이는 x^2을 계산함으로써 얻어진다. 그러나 x의 값에 대한 기울기를 계산하기 위해서는 x에 대해 무엇을 해야 할 것인가?



(그림 3-10) 직선 및 곡선의 기울기

그 발상은 다음과 같다. x의 오른쪽에 있는 제 2 의 점에 주목을 하자. 이 곡선에서 P의 높이는 x^2이고, 점 Q의 높이는 $(x+h)^2$이다. 이 곡선이 P에서 Q로 진행한다고 할 때 위로 휘어져 있다. 그러나 h가 매우 작다면 P와 Q를 연결하는 직선과 이 곡선사이의 차이도 또한 작다. 그러므로 P에서 이 곡선의 기울기는 이 직선의 기울기와 거의 같을 것이다.

이런 발상의 요점은 직선의 기울기를 계산하기가 쉽다는 것이다. 직선의 기울기는 수직 방향의 증가를 수평 방향의 증가로 나누어 얻을 수 있다. 이 경우에 수직 방향의 증가는 $(x+h)^2 - x^2$이고, 수평방향의 증가는 h이다. 그러므로 P와 Q를 연결하는 직선의 기울기는 다음과 같다.

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

따라서 직선 PQ의 기울기는 다음과 같다.

$$\frac{2xh + h^2}{h}$$

위 식에서 h를 약분하면 다음을 얻는다.

$$2x+h$$

그렇다면 처음에 계산하려고 한 점 P에서의 곡선 $y=x^2$의 기울기는 얼마인가? 정적인 상황을 동적인 상황으로 대체하고, x축 방향으로 두 점 P와 Q사이의 거리 h를 점점 더 작게 만들 때 어떠한 현상이 발생하는가?

h가 작아짐에 따라 점 Q는 점 P로 점점 더 가까이 이동한다. 그리고 h의 각 값에 대해서 공식 $2x+h$는 직선 PQ의 기울기를 나타낸다. 예를 들어, $x=5$라 하고, h의 값을 연속적으로 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, ⋯ 이라고 가정하면 이에 대응하는 직선 PQ의 기울기는 10.1, 10.01, 10.001, 10.0001, ⋯ 이 된다. 그러면 여기에서 분명한 수치적인 양식을 즉시 알 수 있다. 즉, PQ의 기울기는 한계값(limiting value) 10.0에 접근한다.[13]

Newton과 Leibniz가 모두 이용한 결정적인 단계는 특별한 점에서의 기울기를 고려하는 근본적으로 정적인 상황으로부터 그 특별한 점에서 시작되는 직선들의 기울기를 곡선의 기울기로 근사시키는 동적인 과정으로의 관심 이동이었다. Newton과 Leibniz는 이런 근사 과정에서 수치적인 양식과 기하학적인 양식을 관찰함으로써 정확한 답에 도달할 수 있었다.

Leibniz는 또한 적분의 개념에 관해서도 광범위하게 연구하였다. 그리하여 그는 독립적으로 직사각형의 합을 구하는 과정을 생각해 내었다. 그러나 유한개의 직사각형의 합으로부터 무한개로 나아가는 과정이 모호했다. 그는 x축 또는 y축을 기준으로 자른 선들이 무한히 작아지면 그 무한의 합으로 도달한다고 하였다. 이것을 그는 $\int ydx$ 라고 표시했다.

Newton의 논리는 Leibniz의 논리보다 훨씬 현대 미적분법의 기본개념에 가깝다. 그러나 Leibniz의 생각이 그럴 듯 하다는 점과 그의 미분기호가 사용하기 쉽고 적절하다는 사실에서 유율법보다 쉽게 받아들여졌다.

오늘날 미분에 대한 Leibniz의 기하학적 접근 방법은 전 세계의 미적분학 강의에

서 일반적으로 채택되고 있으며 도함수에 대한 Leibniz의 기호 $\frac{dy}{dx}$는 널리 사용되고 있다. 반면, 물리적 운동 기호 $\dot{r}$는 물리학 이외에는 거의 사용하지 않는다.

Leibniz는 항상 적절한 기호의 사용은 사고를 돕는다는 것을 통감했고, 미적분 기호의 경우에 그가 선택한 기호는 특히 적절한 것이었다. x와 y에 대하여 생각할 수 있는 최소의 차(미분)를 각각 dx와 dy로 나타내었다. 또한 곡선 아래의 모든 세로선의 합에 대해서 $\int ydx$ 는 사용했다. 여기서 적분의 기호로 사용되는 $\int$ 는 합(sum)의 머리문자 S를 길게 늘인 것이다. 그런데 접선을 구하고자 할 때에는 'calculus differentials(미소한 차의 계산)'이 필요했고, 구적에는 'calculus summation(합의 계산)' 또는 'calculus integrals(통합하는 계산)'이 필요했다. 바로 이러한 의미로부터 'differential calculus(미분법)'과 'integral calculus(적분법)'이라는 용어가 생겨나게 되었다.

제 4 장 고등학교 미적분학 지도에서의 수학사 활용 예시안

1. 예시안 1 : 미적분학 단원의 사전 준비학습
- 무한과 극한 개념의 이해
- 미적분학 학습의 필요성

1) 예시안의 개발 방향

현행 교과 내용을 보면 미적분학을 배우기 전에 함수의 극한이 구성되어 있다. 학생들은 무한 개념과 극한 개념이 습득된 상태에서 극한의 개념으로 정의된 미분을 학습하게 된다.[20, 21] 따라서 미적분 단원 도입 시 본시 내용을 들어가기에 앞서 무한과 극한 개념을 정확하게 이해하고 있는지 확인하는 절차로서, 수학사적인 에피소드나 역설을 활용하여 이해를 증진시킬 필요가 있다. 무한 개념과 극한 개념을 확실히 정립함으로써 앞으로 전개될 용어의 정의나 개념에 대해 쉽게 이해할 수 있을 것이다.

또한 실제 학생들을 지도할 때의 교수·학습 지도안에서 해당 차시에 대한 동기유발이 학생들의 수학 학습 능력을 향상시키는데 중요한 자리를 차지하는 것과 마찬가지로, 새로운 단원이 시작될 때 그 단원의 내용을 왜 배워야 하는가를 수학 내적 ·외적 관련성을 고려하여 제시해 줄 필요가 있다. 대부분의 학생들이 미적분을 왜 배워야 하는지 필요성을 느끼지 못한 채 기능적인 계산위주로 그냥 따라하는 경향이 있는 것이 현실이기 때문이다. 따라서 위와 같은 사전 준비학습을 위한 교수·학습 자료로써 예시안 1(표 4-1~4-3)을 제시하고자 한다.

예시안 1은 무한과 극한 개념의 이해를 증진시키고 미적분학 학습의 필요성을 인식시키는 것을 목적으로 에피소드 ‘Hilbert의 호텔’과 Zenon의 역설(paradox) 가운데 ‘아킬레스와 거북이의 경주’와 같은 수학사적인 내용을 소재로 하고, 또한 미적분 개념 도입을 위한 발문·실생활 문제를 이용하였다.

(표 4-1) 예시안 1 : 미적분학 단원의 사전 준비학습(1/3)

단 계	수학 Ⅱ	대 영 역	다항함수의 미분법 · 적분법
학습 내용	미적분의 사전 준비 학습 - 무한과 극한 개념의 이해		

다음 이야기를 읽고 '무한'에 대한 스스로의 생각을 이야기해 봅시다.

♧ Hilbert의 호텔

어느 호텔이 1호실, 2호실, 3호실, … 로 번호가 매겨진 무한히 많은 방을 가졌다고 하자. 그리고 지금 이 호텔은 만원이라고 한다. 거기에 새로운 손님 한 사람이 도착했다.

유한한 개수의 방을 가진 호텔의 지배인이라면 "지금은 만원입니다"하고 거절하겠지만, 무한히 많은 방을 가진 이 호텔의 지배인은 조금도 허둥대지 않고 객실에 '1호실은 2호실로, 2호실은 3호실로, 하듯이 지금 묵고 있는 객실보다 1씩 증가한 객실로 모두 옮기라'는 방송을 했다. 그래서 지배인은 빈 1호실에 다 새 손님을 들어가게 하였다.

그런데, 호텔은 여전히 만원인데도 이번에는 이 호텔에 손님 100명이 도착했다. 그러자 지배인은 '1호실은 101호실로, 2호실은 102호실로, 하듯이 지금 묵고 있는 객실보다 100씩 증가한 객실로 모두 옮기라'는 방송을 했고, 1호실부터 100호실에 새 손님 100명을 받아들일 수 있었다.

호텔은 여전히 만원인데도, 이번에는 또 이 호텔에 $A_1, A_2, A_3, \cdots$이라는 무한히 많은 손님이 도착했다. 그러자 역시 무한히 많은 방을 가진 호텔의 지배인은 '1호실은 2호실로, 2호실은 4호실로, 3호실은 6호실로, 하듯이 지금 묵고 있는 객실보다 두 배가 되는 번호의 객실로 모두 옮기라 ' 는 방송을 했다. 그렇게 하여 A_1은 1호실로, A_2는 3호실로, A_3은 5호실로…하듯이 무한히 많은 손님을 홀수번호의 객실에 들여보낼 수 있었다.

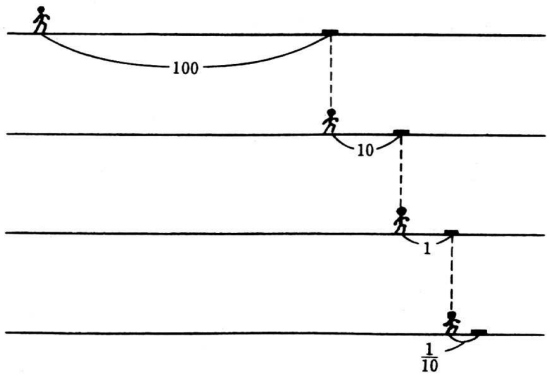
(표 4-2) 예시안 1 : 미적분학 단원의 사전 준비학습(2/3)

단계	수학 Ⅱ	대 영 역	다항함수의 미분법 · 적분법
학습 내용	미적분의 사전 준비 학습 - 무한과 극한 개념의 이해		

♧ Zenon의 역설 - 아킬레스와 거북이의 경주

거북이보다 10배 빠른 아킬레스가 거북이와 달리기 시합을 한다. 거북이가 아킬레스보다 100m 앞에서 출발할 경우 아킬레스는 절대 거북이를 이길 수 없다.

Zenon의 설명 : 먼저 아킬레스의 속도가 거북이보다 10배 빠르므로, 거북이는 초속 10m, 아킬레스는 초속 1m라고 할 수 있다. 거북이는 아킬레스보다 100m 앞에서 출발하므로, 10초 만에 아킬레스는 거북이가 출발한 지점에 도달하지만, 그 때면 거북이는 이미 10m 앞으로 나가 있다. 아킬레스는 다시 그 지점까지 1초 만에 도달하지만 거북이도 1m 앞으로 나가 있다. 다시 아킬레스가 그 지점에 도달하여도 역시 거북이는 약간 앞에 나가 있게 된다. 즉 아킬레스는 영원히 거북이를 따라잡을 수 없다.



(그림 4-1) 아킬레스와 거북이의 경주

위의 Zenon의 역설을 자유롭게 반박하고 토론하여 논리적인 모순은 어디에 있는가를 알아보자.

(표 4-3) 예시안 1 : 미적분학 단원의 사전 준비학습(3/3)

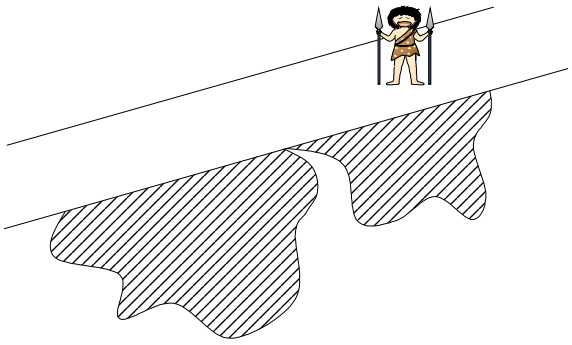
단계	수학 Ⅱ	대 영 역	다항함수의 미분법 · 적분법
학습 내용	미적분의 사전 준비 학습 - 미적분학 학습의 필요성		

♧ 좌표평면에서 주어진 두 점에 대하여, 그 두 점이 이루는 직선의 기울기는 물론 직선의 방정식도 구할 수 있다. 그렇다면 주어진 곡선의 임의의 한 점에서의 접선의 기울기는 어떻게 구할 것인가?

⇒ 미분 개념

♧ 삼각형이나 사각형을 비롯한 다각형의 넓이, 원의 넓이는 우리가 알고 있는 공식을 써서 쉽게 구할 수 있다. 다음과 같이 복잡한 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이(그림 4-2)나 부피를 구하려면 어떻게 할 것인가?

⇒ 적분 개념



(그림 4-2) 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이

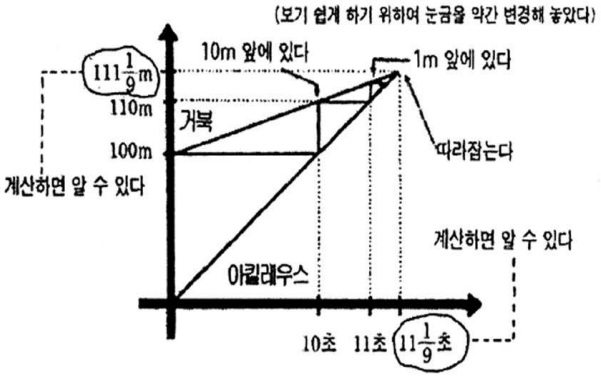
♧ 다음 문제를 풀어봅시다.

예쁜 색을 칠한 판지를 사용하여 울타리를 친 직사각형 모양의 정원을 만들려고 한다. 울타리를 만들 수 있는 판지의 총 길이를 재어보니 300m 였다. 가장 넓은 정원을 만들기 위해서는 정원의 가로, 세로의 길이를 얼마로 해야 하는가?

2) 예시안 분석 및 설명

‘Hilbert의 호텔’은 ‘무한! 이것만큼이나 인간의 정신을 뒤흔들어 놓은 것은 없다 ’라는 말을 남긴 수학자 Hilbert가 Cantor의 무한집합론의 한 부분을 보이기 위하여 고안한 것이다. 이것은 유한의 경우에 상식으로 되어 있는 것이, 무한이 개입 하게 되면 무너져버린다는 것을 담고 있다. 적분 단원의 구분구적법에 무한의 개념이 적용되기 때문에 이러한 에피소드를 통해 미리 무한대의 의미를 되새겨줄 필요가 있다. 학습자는 이 이야기를 읽고 다른 학습자와의 토론을 통해 무한대라는 개념이 고정된 또는 정해진 수가 아니라 무한히 증가하고 있는 상태를 가리키는 것임을 확인할 수 있어야 한다. 물론 이 과정에서 교사는 적절한 발문을 통해 학습자들이 의도한 결론에 이르도록 안내자 역할을 해야 하지만, 학생들이 사고과정을 거칠만한 충분한 시간을 주어야 한다.

Zenon의 역설(paradox) ‘아킬레스와 거북이의 경주’는 다음과 같은 반박을 통해 논리적인 모순을 지적할 수 있다.



(그림 4-3) 아킬레스와 거북이의 경주의 메카니즘

반박 : 위 경주의 각 단계에서 거북이가 아킬레스보다 앞선 거리의 합을 S라 하

면, $S=10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots$이다.

무한등비급수의 합을 계산하면, $S=\frac{100}{9}$이다. 이것은 아킬레스가 정확히 $\frac{100}{9}$m를 달리면 거북이와 똑같은 위치에 있게 됨을 뜻하다. 즉 무한급수가 유한한 값을 가질 수 있다는 데 제논의 역설에 대한 문제가 발생한다.

위의 이야기는 현실적으로는 있을 수 없는 일이지만, 논리적으로는 반론을 제기할 수가 없다. 그 이유는 이 논리가 어디까지나 유한의 논리이면서도, 문제에는 무한의 개념이 들어있기 때문이다. 즉, 거북이가 아킬레스보다 10m 앞에 서 있다는 생각 등은 유한의 논리인데, '무한의 점을 지나면서 한없이 접근 한다'라는 무한의 개념을 이용한 것이다.

위의 이야기에는 시간의 개념이 표면에 노출되지 않고 있으나, 문제의 본질은 시간의 개념에 있다. 아킬레스가 처음 자기보다 앞에 있었던 거북의 자리에 온 사실에 대응한 것은 '시간'이 아니고 그 때의 거북의 '위치 '를 말한 것이다.

이 제논의 역설은 시간을 문제로 삼았을 때, '아킬레스는 거북이를 $\frac{100}{9}$초 이내에는 앞설 수 없다'는 사실을 설명하고 있을 뿐이다.

교사는 학습자들이 논리적인 모순을 이끌어낼 수 있도록, '위의 이야기를 시간과 거리의 그래프나 무한급수와 같은 수학적인 표현으로 나타내어 보아라'와 같은 적절한 발문을 할 필요가 있다.

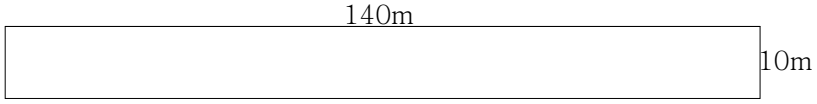
수학 Ⅱ의 미적분법을 배울 학생들은 10-나 단계에서 주어진 두 점을 지나는 직선의 방정식 구하는 것을 학습하였다. 즉, 주어진 두 점을 지나는 직선의 기울기를 충분히 구할 수 있는 수준이다. 이와 관련하여 미분 개념을 처음으로 도입할 때 예시안 1에 제시된 바와 같이 발문할 수 있다. 학생들은 두 점이 아닌 임의의 한 점, 직선이 아닌 접선의 기울기라는 문제에 당혹감을 느끼겠지만, 이것으로써 미분이라는 개념에 호기심을 갖게 될 것이다. 이런 발문을 통해 주어진 곡선의 임의의 한 점에서의 접선의 기울기를 구하는 과정이 미분법임을 인식시켜준다. 또한 학생들은

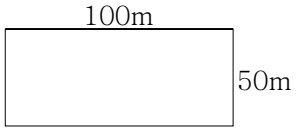
삼각형과 사각형을 비롯한 다각형의 넓이, 원의 넓이를 공식을 적용하여 구할 수 있지만, 복잡한 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이나 피라미드와 같은 사각뿔의 부피를 구하는 공식은 알고 있지 않다. 학생들에게 이러한 복잡한 도형의 넓이나 부피를 구하는 과정에서 적분법이 쓰인다는 것을 인식시켜준다면, 학생들은 새로운 개념을 학습하는데 보다 능동적인 태도를 갖게 될 것이다.

예시안 1에 제시된 미분 개념이 도입된 실생활 문제를 살펴보자.

예쁜 색을 칠한 판지를 사용하여 울타리를 친 직사각형 모양의 정원을 만들려고 한다. 울타리를 만들 수 있는 판지의 총 길이를 재어보니 300m 였다. 가장 넓은 정원을 만들기 위해서는 정원의 가로, 세로의 길이를 얼마로 해야 하는가?

풀이 방법 1) 먼저 둘레의 길이가 300m인 직사각형을 그림으로 그려보자.





위와 같이 여러 가지 방법으로 그릴 수 있으며 가로, 세로의 길이에 따라 넓이가 달라짐을 알 수 있다. 이와 같이 두 변의 길이를 달리하여 각 직사각형에 대한 넓이를 구하는 과정을 계속하여 표로 만들면 다음과 같다.

가로	세로	넓이
10	140	1400
20	130	2600
30	120	3600
40	110	4400
50	100	5000
⋮	⋮	⋮

이 과정을 계속하다 보면 가로와 세로의 길이가 같은 정사각형일 때 넓이가 최대가 됨을 알게 될 것이다.

풀이 방법 2) 가로의 길이를 W, 세로의 길이를 L, 넓이를 A라 할 때, 문제의 조건에 따라 다음 식을 얻는다.

$$2L + 2W = 300, \qquad A = LW$$

이제 미적분학 내용을 이용하여 A를 최대화시키는 W와 L의 값을 구해보자.

$$2L + 2W = 300 \Rightarrow L = 150 - LW$$
$$\Rightarrow A = LW = (150 - W)W = 1500W - W^2$$

위 식의 양변을 길이에 대하여 미분하면, $A' = 150 - 2W$를 얻는다.

이 때 W에 관한 이차함수 $A = 1500W - W^2$이 최대값을 갖는 것은 도함수가 0일 때이다. 따라서

$$A' = 150 - 2W = 0 \Rightarrow W = 75$$

를 얻게 됨으로써 $L = 75$이고, 구하는 최대 넓이는 $A = 75 + 75 = 5625$(㎡)이다.

미적분을 학습한 이후에는 풀이 방법1과 같이 문제를 해결하는 것이 시간낭비라는 생각이 들 것이다. 위와 같이 실생활과 관련된 쉬운 문제를 제시하여 풀이 방법을 달리하여 문제를 해결해 나감으로써 자연스레 새로운 개념을 도입한 계산의 유용성을 느끼게 할 수 있다. 첫 번째 풀이방법과 같이 귀납의 과정을 통해 충분히 답이 유추가 되기는 하지만, 실제 답을 구하기 위해서는 반복적인 계산과정을 거쳐야 한다. 하지만 두 번째 풀이방법과 같이 미적분을 이용하면, 문제를 간단하게 풀 수 있다는 점을 학생들에게 알려줄 수 있다.

학생들은 수학을 배우고 있지만 실생활과 어떤 관련이 있는지 직접 느끼지 못하고 있다. 특히 미적분학은 학생들이 어려워하는 부분인 만큼 실생활에서 어떻게 응용되고 있는지 단원 도입에 들어가기에 앞서 제시해줄 필요가 있다. 학생들이 보다

쉽게 이해할 수 있는 생활 속의 수학으로 안내하여, 미적분은 실생활에서 경험할 수 있는 부분임을 여러 사례를 통해 인식시켜주고, 미적분 단원에 대한 호기심을 증대시킴으로써 학습의 효율을 높일 수 있어야 할 것이다. 따라서 제한된 수업시간에 활용할 수 있는 방안으로 읽을거리(표 4-4와 4-5)를 제공하는 것을 들 수 있다. 물론 현행 교과서에서는 <탐구 활동>을 통해 평균변화율의 정의를 설명하고 이후 극한의 개념을 도입하여 순간변화율, 즉 미분계수의 정의를 제시한 다음, 미분계수의 기하학적인 의미를 설명하고 있다. 하지만, 교과서를 통한 수업 이전에 실생활과 관련 있는 위와 같은 읽을거리를 제공하거나 교사가 직접 설명하는 것은 새로운 개념을 학습해야 하는 학생들에게 있어서 보다 확실한 동기 부여가 될 것이다. 교사는 읽을거리를 제공한 다음 반드시 질문을 통해 확인하고 보충 설명하는 시간을 가짐으로써 학생들이 읽을거리를 활용할 수 있게 해야 한다.

위와 같이 미적분 단원의 사전 준비 학습으로 무한과 극한 개념의 이해를 증진시키고, 미적분이 실생활에 쓰임으로써 우리 삶의 유용성을 담보해준다는 사실을 제시함으로써, 학생들이 미적분을 배워야 할 필요성을 인식하게 될 것이고 학습의 효과도 높일 수 있다. 이미 학습한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 하여, 미적분이 어떻게 쓰이는지 알고 배우는 것과 기능 위주의 계산 과정을 무작정 따라하는 것은 차이가 있을 것이다.

(표 4-4) 학생 제공용 읽을거리(1/2)

미적분학 학습의 필요성 - 실생활에서의 미적분
♧ 순간의 속도 - 자주 변하는 속도는 미분으로 파악 우리는 학교에서 미분이라는 말을 들으면 생소하게 느끼지만 실제로 생활 속에서 미분을 체험하고 있다. 예를 들면 차의 주행 거리를 미분한 것이 바로 속도이다. 즉 속도계는 미분하는 기계라고 할 수 있다. 차의 움직임을 시간을 x좌표, 거리를 y좌표로 하는 그래프로 나타내면, 수평으로 되어 있는 부분은 정지하고 있는 것이다. 급경사의 부분은 속도가 빠르고, 경사가 완만한 부분은 속도가 느리다는 것을 나타낸다. 이렇게 보면 차의 순간 속도는 그래프의 커브를 경사(기울기)로 간주했을 때의 언덕의 기울기로 나타낸다는 것을 알 수 있다. 그렇다면 기울기는 무엇을 나타내는 것일까? 가장 알기 쉬운 것은 그래프의 커브가 직선일 때이다. 이 직선의 그래프에 나타나는 운전은 시간에 비례해서 달리는 것이므로 차가 일정한 속도로 달리고 있음을 의미한다. 또한 속도는 달린 거리를 시간으로 나눈 것이므로 직선의 기울기와 같다. 그렇다면 자주 변하는 속도는 어떻게 계산할 수 있을까? 시속 몇 km인가를 알기 위하여 1시간 달린 거리를 구하는 것은 순간 속도와는 전혀 다르다. 1분 동안 달린 거리를 재어 보자. 만일 1분 동안 달린 거리가 1km이라면 시속 60km가 된다. 그러나 1분 동안 계속 일정한 속도로 달린 것은 아니다. 그래서 1초 동안 달린 거리부터 차례로 생각해 나간다면 아무리 짧은 시간을 생각하더라도 끝이 없다. 이 난점을 극복하는 것이 바로 극한의 개념이다. 즉 '평균속도=움직인 거리/시간의 변화량'의 식에서 시간을 점점 더 작게 해 나갈 때, 이 값이 어떤 값을 향하여 근사해 나간다고 하자. 이 때 그 목표로 한 값을 순간속도라고 한다. 움직인 거리의 미분이란 바로 이 각 순간 속도를 가리키는 것이다. 이것을 그래프로 생각하면 곡선에서의 접선의 기울기를 구하는 것과 같다.

(표 4-5) 학생 제공용 읽을거리(2/2)

미적분학 학습의 필요성 - 실생활에서의 미적분
♧ 미적분의 적용 예 - 우리 삶의 유용성을 돕는 것 수학의 여러 분야 중 미적분만큼이나 폭넓게 응용되는 분야는 없다. 우리 주위를 조금 주의 깊게 둘러보면 많은 것을 발견할 수가 있다. 먼저 들 수 있는 것이 우리가 매일 사용하고 있는 전기이다. 전기의 원천인 발전기・변압기・송전과 같은 전력 관계에서 시작하여 텔레비전・스테레오・세탁기와 같은 가전제품에 이르기까지 모두가 미적분의 원리에 바탕을 두고 있다. 발전기를 예로 들면, 그 원리는 Faraday(1791～1867, 영국의 화학자・물리학자)의 전자 유도 법칙에 의존하고 있다. Faraday의 전자 유도 법칙이란 다음과 같다. '자석의 N극과 S극이 대치하고 가운데를 전선이 이동하면, 전선에는 전압이 발생하고 그 크기는 자속을 횡단하는 비율(즉 미분)에 비례한다.' 이 미분의 아이디어는 고속 열차의 자체 구조에 쓰이고 있다. 텔레비전이나 스테레오, CD 플레이어와 같은 오디오 기기에는 콘덴서나 코일이 도처에 사용되고 있는데, 이들에 각각 미분과 적분이 작용하고 있다. 또한 자동차의 차체를 설계하기 위해서는 매끄러운 곡선이나 곡면의 도안이 필요하다. 거기서 사용되는 것이 스프라인 곡선의 테크닉으로, 이것은 몇 개의 점을 디스플레이에 입력하면 컴퓨터가 미분을 사용하여 매끄러운 곡선으로 이어 주는 것이다. 점보제트기의 자동 조정에서는 자이로를 사용하여 지표면에 대하여 항상 수평 및 기준방향을 향하는 수평 안정판을 설치한다. 그리고 그 위에서 전후・좌우・상하의 가속도를 측정하여 두 번 적분해서 시시각각 변화하는 현재의 위치를 구한다.

2. 예시안 2 : 구분구적법

1) 예시안의 개발 방향

제 7 차 교육 과정 수학 Ⅱ의 영역별 내용에 제시된 바와 같이, 구분구적법은 그 뜻을 이해하고 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있는 정도로 학습한 다음 정적분의 정의를 도입하기 위한 바탕이 되고 있다.[19] 따라서 구분구적법을 제대로 이해하는 것은 정적분의 정의와 정리 및 활용 부분의 학습효과를 높이는데 선행요건일 것이다. 구분구적법의 학습효율을 높일 수 있는 방안으로 예시안 2를 제시하고자 한다. 예시안 2는 구분구적법의 교수·학습 자료로 활용할 수 있도록 개발하였는데 (표 4-6)에 제시된 바와 같이 학습목표 제시, 도입, 전개, 활동지 이렇게 네 단계로 구분하여 그 단계에 따른 내용으로 구성하였다.

예시안 2의 구성 상 교과 내용의 학습할 부분은 전개 단계에 해당되는데, 본 예시안에서 주안점을 둔 것은 학습목표제시, 도입, 활동지 단계이다. 이 세 단계는 모두 결국은 학습목표에 도달하기 위한 과정이라 볼 수 있고, 그 과정에 수학사를 활용하고자 하였다.

예시안 2의 개발에 있어서는 제 2 장의 수학사 활용에 관한 이론적 배경에서 살펴보았듯이, 수학사를 수학 교육에 활용하는 것은 교육과정 구성에서 자연스러운 내용 배열의 준거가 되며, 학습-지도에서 수학적 아이디어의 발달 과정을 따름으로써 자연스럽게 그 이해를 도울 수 있다는 이점을 적극 반영하였다. 또한 옛 문제를 활용함으로써 학생들로 하여금 보다 직접적으로 수학의 역사를 통한 수학 학습의 즐거움과 수학의 진면목을 느끼게 하는 데 주력하였다.

예시안 2는 자칫 형식적인 면에 치우칠 수 있는 학습목표 제시와 도입 단계에서부터 학생들의 동기 유발과 학습 의욕을 증대시키기 위하여 수학사적 내용을 활용하였으며, 많은 시간을 할애하도록 하였다. 예시안 2는 말 그대로 교수·학습 자료의 예시안인 만큼 실제 현장 수업에서는 제한된 시간으로 불가피하게 수정·보완이 필요할 수밖에 없으리라 본다.

(표 4-6) 예시안 2 : 구분구적법

단계	내 용
학습 목표 제시	Archimedes와 Cavalieri의 방법 등 구분구적법의 역사적인 배경을 알아보고, 이를 통해 구분구적법의 의미를 이해하고 구분구적법으로 도형의 넓이와 부피를 구해보도록 하자.
도입	수학사를 활용한 넓이와 부피의 이해 1) Archimedes의 포물선 구적법 2) Cavalieri의 불가분량법을 이용한 넓이와 부피 구하기
전개	교과 내용의 이해 1) 직사각형으로 넓이의 근사값 계산 2) 얇게 잘라낸 조각을 이용한 부피의 근사값 계산 3) 위의 근사값의 극한으로 넓이 또는 부피를 구하는 방법 ⇒구분구적법
활동지	1) 반지름이 r인 원에 내접 및 외접하는 정n다각형의 넓이는 각각 $A_n = \frac{1}{2}nr\sin\frac{2\pi}{n}$, $B_n = nr^2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$, $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = \pi r^2$ 임을 보이자. 2) 포물선 $y = x^2$에서, x좌표가 -1과 1인 두 점 사이의 선분으로 둘러싸인 포물선 부분의 넓이를 구분구적법으로 구하고, Archimedes의 포물선 부분의 구적법과 견주어보자. 3) 직사각형 $n = 4$개를 사용하여, 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b)$로 둘러싸인 부분의 넓이의 근사값을 구해보고 Cavalieri가 구한 것과 견주어 보자. 4) 구분구적법을 이용하여 반지름이 r인 구의 부피를 구하여 보고, Cavalieri가 구한 것과 같음을 확인해보자.

2) 예시안 분석 및 설명

학습목표의 제시

구분구적법은 넓이와 부피를 구하는 방법이므로, 학생들이 이미 알고 있는 넓이와 부피에 대한 개념을 다음과 같이 새로운 시각으로 제시할 수 있다.

'직사각형의 넓이 또는 정육면체의 부피에 대한 계산은 길이, 너비, 높이 등과 같은 여러 가지 크기를 곱하는 간단한 문제이다. 예를 들어 가로 30㎝, 세로 50㎝인 직사각형의 넓이를 구해보자. 길이가 30㎝인 한 가닥의 굵은 줄을 50㎝ 평행이동 시켰을 때, 움직인 부분의 크기를 넓이라고 정의하면 그 넓이는 30×50(㎠)으로 설명할 수 있다.'

또한 반지름이 r인 원의 넓이를 구하는 과정을 되짚어 줄 수 있다. 구분구적법이 나오기 전의 계산으로 원을 잘게 나눈 다음 직사각형 모양으로 재배열하여 넓이를 구한 것과 Kepler의 구적법을 활용할 수 있다. Kepler의 구적법은 활동지의 문제 1에 제시되어 있는데 원에 접하는 정 n 다각형의 넓이를 구하고, 그 극한으로 원의 넓이를 구하는 것이다.

학생들은 사각형, 삼각형 및 원 등 간단한 도형들의 넓이는 쉽게 구할 수 있다. 그러나 휘어진 모서리를 가진 도형의 넓이 또는 휘어진 면을 가진 입체의 부피를 어떻게 계산할 수 있을까? 이들을 구하는 문제는 오랜 옛날부터 수학자들의 관심을 끌었다. 따라서 본 예시안은 학생들로 하여금 Archimedes와 Cavalieri의 방법 등 구분구적법의 역사적인 배경을 알게 하고, 수학자들의 아이디어를 접하는 과정을 통해 구분구적법의 의미를 보다 잘 이해할 수 있다는 데에 주안점을 두었다.

도입 - 수학사를 활용한 넓이와 부피의 이해

도입 단계에서는 Archimedes의 포물선 구적법과 Cavalieri의 불가분량법과 같은

수학사적 내용을 활용하였다.

‘포물선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 어떻게 하면 구할 수 있을까? 고대의 수학자 Archimedes는 일련의 선분으로 포물선에 근사시키면 선분으로 둘러싸인 도형은 여러 개의 삼각형으로 구성된다는 사실을 이용하여 이들 도형들의 합으로 포물선 아래의 넓이에 대한 근사값을 구하였다. 이를 더욱 발전시켜 선분의 값을 증가시키고 이런 계산을 반복함으로써 포물선 넓이에 더욱 가까운 근사값을 얻을 수 있게 되었다’

위와 같이 Archimedes의 포물선 구적법을 언급하고, 구체적인 계산 방법(제 3 장 - 적분개념의 기원)을 설명할 수 있다.

마찬가지로 Cavalieri의 불가분량법을 다음과 같이 제시할 수 있다.

‘불가분량의 개념은 명확하게 정의되지 않았지만 주어진 도형의 불가분량은 그 도형의 현을 의미하고, 그 평면 도형은 그와 같이 평행하게 무한히 많은 불가분량 집합으로 이루어진 것으로 간주할 수 있다. Cavalieri는 어떤 평면 도형의 평행한 불가분량들 각각을 자체의 축을 따라서 불가분량의 끝점들은 연속적인 경계를 유지하면서 밀어 움직이면, 그리고 원래의 도형과 새로 생긴 도형이 같은 불가분량으로 이루어지기만 한다면, 새로 생긴 도형과 원래의 도형의 넓이는 서로 같다고 주장하였다. 이를 바탕으로 Cavalieri는 두 가지 원리를 얻게 되었다.’

그리고 제 3 장에 나와 있는 Cavalieri의 원리를 소개하고 이를 이용한 장축과 단축이 a, b 인 타원의 넓이와 반지름이 r인 구의 부피를 구해 보는 것이다.

위와 같이 Archimedes와 Cavalieri는 휘어진 모서리를 가진 도형의 넓이와 휘어진 면을 가진 입체의 부피를 구했다. 그러한 이들이 구한 도형의 넓이나 입체의 부피는 특별한 경우이거나 아니면 복잡한 계산을 처음부터 다시 해야 하는 불편함이 있다. 따라서 이것을 일반화할 필요성이 생기게 되었고, 이 일반화 과정이 구분구적법임을 알게 하고 이것이 적분개념을 형성하게 된 것임을 학생들에게 인식시켜야 한다.

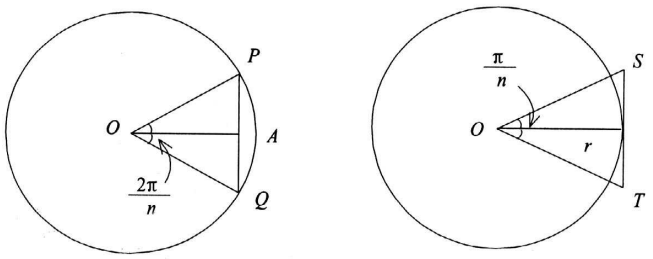
전개 - 구분구적법

그리스 시대부터 넓이, 부피를 구하기 위한 많은 수학자들의 노력으로 적분학이 발전되어 왔다. 넓이의 경우는 매우 가늘고, 평행한 직사각형들의 넓이의 합으로 그 넓이를 근사시켜 구했으며, 부피의 경우는 얇게 잘라낸 조각들의 부피의 합으로 그 부피를 구하였다. $y = x^2$와 같은 간단한 곡선 아래의 넓이와 원뿔의 부피를 구하는 과정을 통해 구분구적법을 이해시킨다.

활동지

활동지는 네 문제로 구성하였는데, 이 문제들은 위에서 말한 바와 같이 학습목표 제시, 도입, 전개 어느 단계에서든 필요에 따라 활용할 수 있다. 문제에 따라 교사가 설명 중에 문제를 함께 해결할 수도 있고, 학생 스스로 해결할 수 있는 시간을 줌으로서 이해도를 확인할 수도 있는데 문제 해결 과정은 다음과 같다.

[문제 1] ***[Kepler의 구적법]*** 반지름이 r인 원에 내접 및 외접하는 정n다각형의 넓이는 각각 $A_n = \frac{1}{2}nr\sin\frac{2\pi}{n}$, $B_n = nr^2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$, $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = \pi r^2$ 임을 보이자.



(그림 4-4) 내접 · 외접하는 정n다각형의 넓이

[풀이] 정n다각형의 각 꼭지점에서 n개의 반지름을 그으면 n개의 삼각형은 합동이다. 그러면 중심각은 $\frac{2\pi}{n}rad$이다.

그러므로 (그림 4-4)의 왼쪽 그림에서 넓이와 그 극한을 구하면 다음과 같다.

$$2n(\triangle OAQ) = 2n \cdot \frac{1}{2}(AQ \cdot OA)$$

$$= nr^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

$$= \frac{nr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\therefore A_n = \frac{1}{2}nr^2\sin\frac{2\pi}{n}$$

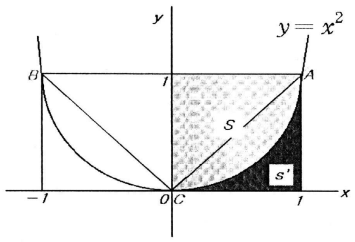
$$\lim_{n\to\infty} A_n = \pi r^2$$

또 (그림 4-4)의 오른쪽 그림에서 B_n과 그 극한을 구해 보자.

$$B_n = n(\triangle OTS) = nr^2\tan\frac{\pi}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} B_n = \pi r^2 \cdot 1 \cdot 1 = \pi r^2 \qquad \square$$

[문제 2] ***[Archimedes의 포물선 구적법]*** 포물선 $y = x^2$에서, x좌표가 -1과 1인 두 점 사이의 선분으로 둘러싸인 포물선 부분의 넓이를 구분구적법으로 구하고, Archimedes의 포물선 부분의 구적법과 견주어보자.



(그림 4-5) 포물선 $y = x^2$ 부분의 넓이

[풀이] y축을 중심으로 좌우가 대칭이므로 S의 넓이를 구한 뒤 2배 해주면 된다.

구간 $[0,1]$을 n등분하면 각 소구간의 길이는 $\frac{1}{n}$이다.

$$S' = \lim_{n\to\infty}\{0^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ S = 1 - S' = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ 구하는 포물선 부분의 넓이는 $2S = \frac{4}{3}$이다.

그리고 $\triangle ABC$의 넓이는 1이므로 Archimedes가 구한 식을 만족함을 확인할 수 있다. □

[문제 3] ***[Cavalieri의 타원의 넓이 구하기]*** 직사각형 $n=4$개를 사용하여, 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$로 둘러싸인 부분의 넓이의 근사값을 구해보고 Cavalieri가 구한 것과 견주어 보자.

[풀이] $0\le x\le a,\ 0\le y\le b$에 대하여 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$의 개형을 그린다. 주어진 구간을 길이가 같은 4개의 소구간으로 나누면 이 소구간들의 경계점은 $x_1=\frac{a}{4},\ x_2=\frac{a}{4},\ x_3=\frac{a}{4}$이다.

각 소구간의 길이는 $\Delta x=\frac{a}{4}$이다. 각각의 소구간에서 내접하는 직사각형을 그려보자. 주어진 소구간에서 함수 $f(x)=b\sqrt{-\frac{x^2}{a^2}+1}$ 이 최소값을 취하는 점을 C_k라 하면, 주어진 함수는 단조증가하므로 각 소구간에서 f가 최소값을 취하는 점은 각 소구간의 왼쪽 경계점이다. 따라서 내접하는 직사각형의 넓이를 합한 값 S_4는 다음과 같다.

$$S_4 = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + f(c_3)\Delta x + f(c_4)\Delta x$$
$$\fallingdotseq \frac{ab}{4} \times 0.8739$$

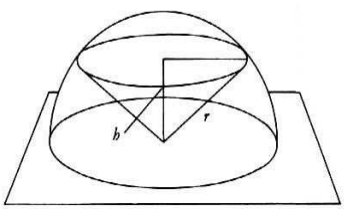
따라서 구하고자 하는 타원의 넓이 $4S_4$는 다음과 같다.

$$4S_4 = 0.8739ab$$

n이 충분히 큰 경우에 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b)$의 넓이는 $a\,b$가 될 것이고, 이것은 Cavalieri의 방법으로 푼 결과와 같게 된다. □

[문제 4] ***[Cavalieri의 구의 부피 구하기]*** 교과 내용의 구분구적법을 이용하여 반지름이 r인 구의 부피를 구하여 보고, Cavalieri가 구한 것과 같음을 확인해보자.

[풀이] 반구의 높이가 r이므로 n등분하여 얇은 원기둥의 두께는 $\Delta x = \frac{r}{n}$이 된다. 반구의 높이에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x) = (r^2 - x^2)\pi$이라 하면, 구의 부피 V는 다음과 같다.



(그림 4-6) 구의 부피

$$V = \lim_{n\to\infty}\left\{S\left(\frac{r}{n}\right)\Delta x + S\left(\frac{2r}{n}\right)\Delta x + \cdots + S\left(\frac{nr}{n}\right)\Delta x\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{r^3\pi}{n^3}\left[(n-1)n^2 - \{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\}\right]$$
$$= \frac{2}{3}r^3\pi$$

따라서, 구하고자 하는 구의 부피는 $\frac{4}{3}r^3\pi$이 되어 Cavalieri가 구한 것과 같음을 알 수 있다. □

제 5 장 결론

본 논문에서는 미적분학을 학생들이 재미와 흥미를 느끼면서 배울 수 있도록 수학사를 활용한 지도에 관하여 연구하였다. 먼저 수학교육에서의 수학사 활용에 대한 선행 연구를 통해 수학사 활용의 필요성과 그 효과 그리고 실제 수업 전개 및 교수·학습 자료 개발과 밀접한 관련이 있는 수학사 활용의 방법적 측면, 수학사 도입에서의 교사의 역할에 대하여 논한 다음, 미적분 개념의 기원이 되는 여러 수학자들의 아이디어를 중심으로, 미적분학의 수학사적 배경을 고찰하였다. 그리고 수학사 활용의 효과와 방법적 측면, 미적분학의 수학사적 배경을 토대로 하여, 고등학교 미적분학 지도에 있어서의 수학사 활용 예시안을 제시하였다.

학습에 대한 자율적인 동기 없이 수업을 듣는 학생은 그저 진도만 따라가기에 급급한 수동적인 학습밖에는 할 수가 없다. 반면에 '왜 배워야 하는가?'라는 의문을 가진 학생에게 교사는 적극적인 학습자세와 창의적인 사고력, 그리고 앎의 즐거움을 이끌어내기가 수월하다. 교사는 학생들에게 미적분학이 실생활에서 어떻게 이용되고 있는지를 소개하고 그로 인해 미적분학을 배워야만 하는 당위성을 설명함으로써 동기부여를 할 수 있다. 또한 기호화된 식으로 가득 찬 수업보다는 수학사와 관련된 재미있는 내용과 연계하여 수업을 하면 학생들의 이해를 도울 수 있다. 수학사를 활용한 미적분 지도에서 미적분학의 발생적 토대가 된 문제 유형을 학생들에게 제시하는 것도 중요하다. 학생들에게 수학사적 배경이 되는 문제들을 소개함으로써 수학자들이 얼마나 많은 시행착오를 거쳐서 오늘날 미적분학의 이론이 정립되었는지 알게 해준다면 보다 높은 학습 효과를 기대할 수 있을 것이다.

본 논문에서는 위와 같은 개발 방향에 따라 수학사적 내용 및 문제를 바탕으로 미적분 단원의 사전준비학습과 구분구적법 지도에 활용할 수 있는 예시안을 제시하였다. 이 예시안은 기존 미적분학 교육의 문제점을 해결하여 수학교육의 질과 학습의 효과를 좀 더 높일 수 있고, 학생들에게 미적분의 개념을 정확하게 이해시킴으로써 수학에 대한 흥미와 긍정적인 태도를 갖게 하고 나아가서 수학적 문제 해

결력을 신장시킬 수 있을 것으로 기대된다.

수학사를 활용한 미적분학 지도에 있어서 교사가 유념해야 될 중요한 사항을 서술하면 다음과 같다.

첫째, 학생들이 미적분학을 왜 배워야하는지 질문을 할 수 있도록 유도한다. 그럼으로써 학생들에게 미적분학의 학습에 관한 당위성을 설명한다.

둘째, 수업의 본 내용에 들어가기에 앞서 필요한 개념들을 사전 준비학습을 통하여 이해를 돕고, 처음 접하게 될 이론에 대해 자연스레 접근할 수 있게 한다.

셋째, 학생들이 미적분학의 전반적인 흐름을 파악할 수 있도록 하며 학생 스스로가 개념지도(concept map)를 작성할 수 있도록 한다.

넷째, 역사 발생적 과정의 이해를 통해서 학생들이 개념 형성에 대한 여러 가지 시행착오를 할 수 있는 시간을 갖도록 한다.

다섯째, 오늘날에 배우고 있는 간단하고 편리한 방법들이 오랜 기간의 시행착오를 거쳐 형성되어 온 것임을 인식시켜 미적분학에 대한 두려움을 갖지 않게 한다.

본 논문의 일관된 논지는 수학사를 활용한 학습 지도가 이루어져야 한다는 것으로서 미흡하나마 두 가지 형태의 예시안을 제시하였다. 수학사를 활용한 학습 지도가 활발하게 진행되기 위해서는 수학교육의 시각을 바탕으로 한 수학사에 관한 자료정리 및 수학사 활용의 교수·학습 자료 개발, 제한된 시간 안에서 수학사를 활용하는 수업 전개 방식 등 연관성이 있는 여러 문제들에 대한 후속 연구가 필요하다고 생각한다.

참고문헌

[1] 김용운・김용국. 수학사의 이해. 도서출판 우성. 2002.

[2] 김응태・박한식・우정호. 수학교육학개론. 서울대학교 출판부. 2001.

[3] 우정호. 학교 수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부. 2000.

[4] 우정호. 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교 출판부. 2003.

[5] 황혜정 외 5인. 수학교육학신론. 문음사. 2001

[6] Carl B. Boyer・Uta C. Merzbach. 수학의 역사. 양영오・조윤동 옮김. 경문사. 2000.

[7] Howard Eves. 수학사. 이우영・신항균 옮김. 경문사. 1995

[8] Morris Klein. 수학의 확실성. 박세희 옮김. 민음사. 1984.

[9] 김상화. 수학사를 도입한 초등학교 수학교재 개발 및 적용에 관한 연구. 인천교육대학교 교육대학원 석사학위논문. 1999

[10] 김춘영. 수학사를 이용한 국민학교 수학과 교재 개발 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문. 1993.

[11] 백석윤. 수학사와 수학교육과정. 제5회 수학교육학 세미나집. 1990

[12] 98 수학사 세미나팀. 수학사를 도입한 수업. 수학사랑 제5회 Math Festival. 1998.

[13] 심유미. 미적분학의 수학사적 고찰. 연세대학교 교육대학원 석사학위논문. 2002.

[14] 이현주. 수학사적 내용의 도입을 통한 고등학교 미적분학 지도에 관한 연구. 경희대학교 교육대학원 석사학위논문. 2001.

[15] 정미경. 수학사를 도입한 중・고등학교 수체계 지도에 관한 연구. 경희대학교 교육대학원 석사학위논문. 1994.

[16] 한대희. 미적분의 역사 발생적 전개에 관한 연구. 서울대학교 대학원 석사학위논문. 1997.

[17] 허민. 수학사와 수학교육. 한국수학교육학회지 <수학교육 프로시딩> 제6집.

1997.
[18] 현원동. 수학교과서에서 나타난 미적분 개념의 접근방식과 학생들의 미적분 개념의 이해. 단국대학교 교육대학원 석사학위논문. 2003.
[19] 교육인적자원부. 고등학교 교육과정 해설 - 수학. 대한교과서주식회사. 2001.
[20] 정광식・강병개・서정인. 고등학교 수학 Ⅱ교과서. 동아서적(주). 2002.
[21] 최상기 외 5인. 고등학교 수학 Ⅱ교과서. (주)고려출판. 2002.