creative commons

COMMONS DEED

저작자표시 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.
- 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

[UCI]I804:24011-200000267090

2019년 2월

석사학위 논문

가변 생산속도 및 판매상실을 갖는 생산-재고 모형의 분석

조선대학교 대학원

산업공학과

김 향

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

가변 생산속도 및 판매상실을 갖는 생산-재고 모형의 분석

2019년 2월 25일

조선대학교 대학원

산업공학과

김 향

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

가변 생산속도 및 판매상실을 갖는 생산-재고 모형의 분석

지도교수 백 정 우

이 논문을 공학 석사학위신청 논문으로 제출함

2018년 10월

조선대학교 대학원

산업공학과

김 향

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

김향의 석사학위논문을 인준함

위원장 조선대학교 교 수 김 성 준 (인)

위 원 용인대학교 교 수 박 진 수 (인)

위 원 조선대학교 교 수 백 정 우 (인)

2018년 11월

조선대학교 대학원

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

목차

목차 ····· i
표 목차 ····· ii
그림 목차 ····· iii
ABSTRACT ····· iv
제 1 장 서론 ····· 1
1.1 연구 배경 및 목적 ····· 1
1.2 연구의 범위 및 내용 ····· 3
1.3 논문의 구성 ····· 3
제 2 장 기초 이론 소개 ····· 5
2.1 M/M/1 대기행렬시스템 ····· 5
2.2 재생성과정(Regenerative progress) ····· 7
2.3 M/M/1/K 대기행렬시스템 ····· 8
제 3 장 가변 생산속도 및 판매상실을 갖는 생산-재고 모형의 분석 ····· 11
3.1 시스템 설명 ····· 11
3.2 기호와 확률 정리 ····· 12
3.3 안정상태 방정식 ····· 13
3.4 곱 형태의 해 유도 ····· 18
3.5 성능척도 ····· 24
제 4 장 수치예 ····· 26
제 5 장 결론 ····· 29
참고문헌 ····· 30

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

표 목차

<표 4.1> s변화에 따른 평균재고량과 평균고객수 ····· 26

<표 4.2> c_{high} 값의 변화에 따른 최적 평균 비용 ····· 28

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

그림 목차

<그림 2.1> M/M/1 시스템의 고객수과정에 대한 전이율다이어그램 ····· 5
<그림 2.2> 재생성과정으로 본 M/M/1 대기행렬 ····· 7
<그림 2.3> M/M/1/K 시스템의 고객수과정에 대한 전이율다이어그램 ····· 8
<그림 3.1> 가변 생산속도 및 판매상실을 갖는 생산-재고 모형 ····· 11
<그림 3.2> 가변 생산속도 및 판매상실을 갖는 생산-재고모형의 샘플경로 ····· 13
<그림 3.3> 변조된 재고모형의 전이율다이어그램 ····· 21

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

ABSTRACT

A lost-sales production-inventory model with service time and variable production speed

Hyang Kim
Advisor: Prof. Jung Woo Baek, Ph.D.
Department of Industrial Engineering
Graduate School of Chosun University

In the thesis, the lostsales production-inventory model with service time and variable production speed is analyzed. Customers arrive in the system according to the Poisson process. The service times of customers are independent and identical distributed exponential random variables. At a service completion epoch, the customer leaves the system with an inventory item. The server can provide the service only when the inventory level is positive. If the inventory level drops to zero, the customers in the system wait for the service until inventory is replenished. During the stockout period, the newly arriving customers are assumed to be lost. The inventory items are replenished by internal production based on (s,S)-policy, and the production times are assumed to be exponential. The production rate is assumed to be variant.

We derive the stationary joint probability of the inventory level and the number of customers in product form. Using the joint probability, we determine the optimal operational strategy that minimizes the cost per unit time.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제 1 장 서론

1.1 연구 배경 및 목적

대기행렬이론은 생산/서비스 시스템의 분석을 위해 운용특성을 분석하고 이를 바탕으로 최적의 운용규칙을 결정하는 학문 분야이다. 대기행렬모형은 고객의 도착과정, 서비스시간 및 서어버의 운영정책에 따라 모형의 복잡도가 증가할 수 있다. 일반적인 대기행렬모형 중에 고객이 존재함에도 불구하고 서어버가 어떤 이유로 서비스를 제공하지 못하는 모든 대기행렬시스템을 휴가형 대기행렬시스템이라 한다. 휴가형 대기행렬시스템은 Levy and Yechiali [22]의 복수휴가 시스템 및 Heyman[18]의 복수휴가 시스템을 대표적인 예로 들 수 있다. 이외의 다양한 형태의 연구는 [1-2], [5-7], [14-15]에서 찾을 수 있다.

많은 연구자들이 다양한 형태의 휴가형 대기행렬시스템을 연구하였음에도 불구하고 두 종류 이상의 제품이 조립되어 최종 생산물을 만드는 조립생산시스템을 대기행렬시스템으로 모델링하는 것은 매우 어려운 문제로 알려져 있다. Berman and Kim [9]과 Bozer and McGinnis [12]는 ‘assembly-like queue’ 또는 ‘kitting queue’ [16]라 불리는 새로운 대기행렬시스템을 제시하여 이러한 문제점을 해결하고자 하였다. 이와 같은 연구모형이 기존의 대기행렬시스템과 갖는 가장 큰 차이점은 고객을 서비스하기 위한 내부의 재고가 존재하여 서어버의 서비스가 재고의 양에 의해 제한될 수 있다는 점에 있으며, 본 연구의 주제가 되는 내부재고를 갖는 대기행렬모형을 시초가 되는 연구라 할 수 있다.

내부재고를 갖는 대기행렬모형에 초기 연구는 비용최적화의 관점에서 연구되기 시작하였다. Berman et al. [9]은 고객의 도착간격과 서비스시간이 확정적일 때 단위시간 당 비용을 최소화하는 모델을 제시하였다. Berman and Sapna [10]은 재고의 조달시간을 0으로 가정한 Berman and Kim [9]을 확장하여 일반적인 분포를 따르는 조달기간을 갖는 경우를 분석하였다. He and Jewkes [17]는 M/PH/1 대기행렬시스템의 경우를 고려하고 이를 바탕으로 최적 비용분석을 행하였다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

위의 다양한 노력에도 불구하고 고객수와 재고량에 대한 결합확률분포가 완벽하게 유도된 것은 극히 최근의 일이다. 이는 고객수과정과 재고량과정이 서로 종속성을 갖기 때문에 분석의 어려움이 발생하기 때문이다. 이와 같은 대기행렬 시스템을 완벽하게 분석한 최초의 연구는 Schwarz and Daduna [27] 및 Schwarz et al. [26]에서 찾을 수 있다. 그들은 M/M/1 대기행렬시스템을 따르며 조달시간이 지수분포인 경우를 모델링하고 고객수 및 재고량에 대한 곱형태의 안정상태 결합확률분포를 유도하였다. Saffari et al. [25]은 일반적인 분포를 따르는 조달시간과 (r, Q)-정책으로 재고가 조달되는 모형을 연구하였다. Krishnamoorty and Viswanath [21]은 기존의 연구와는 달리 내부 생산에 의해 재고가 보충되는 시스템을 연구하였다. 이는 고객수와 재고량의 분포가 안정상태 하에서 곱형태로 분해가 될 수 있다는 것을 이론적으로 완벽하게 증명하였다는 점에서 의의를 갖는다. Schwarz et al. [26]은 미리 정해진 재고의 수준의 이하가 될 경우 재고를 주문하는 모형을 연구하였다. Baek and Moon [3]는 Krishnamoorty and Viswanath [21] 과 Schwarz et al. [26]를 결합하여 재고가 외부의 조달과 더불어 내부의 생산에 의해 보충될 수 있는 확장된 모형을 다루었다.

마코비안 도착과정 및 서비스를 고려한 대표적인 연구는 Krishnamoorty and Narayanan [20]에서 찾을 수 있다. 그들은 고객이 마코비안 도착과정(Markovian Arrival Process, MAP)으로 도착하는 MAP/M/1 대기행렬을 기반으로 내부재고를 갖는 경우를 분석하였다. Krishnamoorthy et al. [19] 및 Marand et al. [24]은 위의 언급한 연구 이외의 다양한 결과를 소개하였다.

이와 같이 최근 많은 연구자들이 내부의 재고를 사용하는 대기행렬모형을 연구하였음에도 불구하고 대부분의 연구는 이산형 재고를 갖는 경우만을 다루었다. Barron and Hermel [8]은 연속 재고를 사용하는 시스템에 모델을 처음으로 다루었으나 고객수과정을 제외하고 재고량에 대한 결과만을 분석하여 실제 적용에 어려움이 있다. Baek et al. [4]은 이와 같은 어려움을 극복하기 위해 내부재고가 연속형인 대기행렬모형 분석하고 고객수 및 재고량에 대한 결합분포를 완벽한 형태로 유도하였다.

최근 많은 연구자들에 의해 내부재고를 갖는 대기행렬모형이 연구되었으나, 내부생산의 속도가 가변적인 시스템에 대한 연구는 전혀 진행되지 않은 상태이다. 따라서 본 논문은 내부재고의 생산 속도를 변화할 수 있는 대기행렬시스템을

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

분석한다. 본 연구의 결과는 생산과 재고를 복합적으로 관리해야하는 제조시스템의 운용을 위해 효과적으로 적용할 수 있을 것이다.

1.2 연구의 범위 및 내용

본 연구는 내부 재고의 생산속도가 가변적인 대기행렬모형을 다룬다. 고객들은 포아송과정으로 도착하고, 각 고객의 서비스 시간은 독립적이고 동일한 지수분포를 따른다. 고객은 시스템을 이탈하며 내부의 재고를 사용한다. 재고가 모두 소진되면 시스템에 존재하는 고객은 재고가 보충될 때까지 시스템 내부에서 대기한다. 이 기간 중에 새로 도착하는 고객은 서비스를 받지 못한 채 시스템을 이탈한다. 재고는 지수분포를 따르는 시간마다 하나씩 생산되되 생산 시간은 재고의 양에 따라 가변적이라 가정한다.

내부재고를 갖는 대기행렬모형의 경우 고객수과정 $\{N(t), t \geq 0\}$와 재고량과정 $\{I(t), t \geq 0\}$ 서로 독립이 아니라는 것은 쉽게 알 수 있다. 따라서 재고량이 최대가 되는 점들은 기존의 재고모형과 같은 재생성점을 이루지 않는다. 왜냐하면 재고량이 최대가 되는 시점에서의 고객수에 따라 이후의 과정이 영향을 받을 수 있기 때문이다. 그러나 본 논문에서는 재고량이 최대가 되는 시점을 재생성점과 유사한 역할을 하는 점으로 다루어 분석을 행한다. 이와 같은 처리는 시스템을 분석하는데 매우 유용하게 사용할 수 있다.

본 논문에서는 이와 같은 내부재고를 갖는 대기행렬시스템의 고객수와 재고량에 대한 안정상태 결합확률분포를 유도하고 이를 이용하여 단위시간당 비용을 최소화하는 운용 규칙을 결정한다.

1.3 논문의 구성

본 논문 구성은 다음과 같다. 제2장에서는 본 논문의 대상시스템을 분석하기 위해 M/M/1 대기행렬시스템, 재생성과정 및 M/M/1/K 대기행렬모형에 관한 기본적인 이론들을 보인다. 3장에서는 본 논문의 대상인 가변 생산속도 및 판매상실을 갖는 생산-재고 모형을 분석한다. 고객수과정과 재고량과정의 확률분포가 안정상태 하에서 독립이 되는 것을 우선 증명하고 이를 바탕으로 내부재고의 생산

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

속도가 가변적인 생산-재고시스템의 고객수와 재고량에 대한 안정상태 결합확률 분포를 곱형태로 유도한다. 또한 비용최적화 문제를 풀기 위한 다양한 상태확률 및 평균값들을 유도한다. 4장에서는 수치예를 보인다. 5장에서는 연구의 결과를 정리한다.

Collection @ chosun

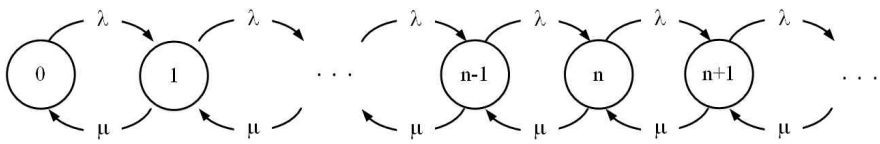
조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제 2 장 기초 이론 소개

본 장에서는 본 논문의 시스템 분석을 위한 기초이론을 소개한다.

2.1 M/M/1 대기행렬시스템

M/M/1 대기행렬시스템은 고객이 포아송과정으로 도착하여 도착한 순서대로 서비스 받고 이탈하는 대기행렬시스템이다. 고객들의 서비스시간은 iid 지수분포를 따른다. 고객의 도착률을 λ, 임의의 고객의 평균서비스시간을 $E(S)=1/\mu$라고 하면 이 시스템의 고객수과정은 다음과 같은 전이율다이아그램을 갖는 출생사멸과정이다.



<그림 2.1> M/M/1 시스템의 고객수과정에 대한 전이율다이어그램

이제, $N(t)$를 시점 t에 시스템 내의 고객수라 정의하고, $P_n(t)=\Pr[N(t)=n]$이라 하자. 그러면 위의 전이율다이어그램을 이용하여 같은 시스템방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dt}P_0(t)=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t), \tag{2.1.1}$$

$$\frac{d}{dt}P_n(t)=\lambda P_{n-1}(t)-(\lambda+\mu)P_n(t)+\mu P_{n+1}(t),\ (n\geq 1). \tag{2.1.2}$$

dCollection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

따라서 안정상태방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1 \ , \tag{2.1.3}$$

$$0 = \lambda P_{n-1} - (\lambda + \mu) P_n + \mu P_{n+1}, \ (n \geq 1) . \tag{2.1.4}$$

위의 식을 풀기 위해 다음과 같은 PGF를 정의하자.

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n . \tag{2.1.5}$$

식 (2.1.3)과 (2.1.4)에 z^n 을 곱한 후 모든 $n = 0,1,2\cdots$ 에 대해 더하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$P(z) = \frac{P_0(1-z)}{\rho z^2 - (1+\rho)z + 1} = \frac{P_0}{1-\rho z}, \quad (\rho = \lambda E(S) = \lambda/\mu) . \tag{2.1.6}$$

위 식에 $z = 1$ 을 대입하고 $P(z)|_{z=1} = 1$ 을 이용하면 다음 결과를 얻는다.

$$P_0 = 1 - \rho . \tag{2.1.7}$$

따라서 $P(z)$는 다음과 같다.

$$P(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho z} . \tag{2.1.8}$$

식 (2.1.8)을 이용하면 평균고객수와 분산은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E(N) = \frac{d}{dz} P(z) \Big|_{z=1} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1-\rho} , \tag{2.1.9}$$

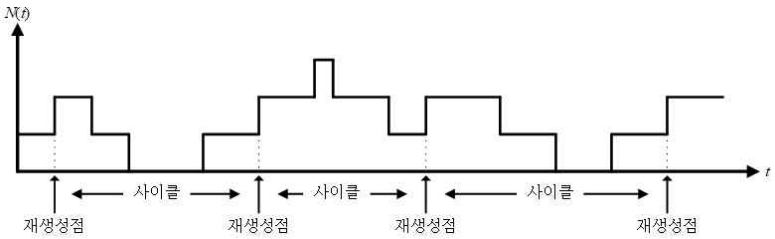
Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$$Var(N) = \left[\frac{d^2}{dz^2}P(z)\right]_{z=1} + \left[\frac{d}{dz}P(z)\right]_{z=1} - \left\{\left[\frac{d}{dz}P(z)\right]_{z=1}\right\}^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}. \quad (2.1.10)$$

2.2 재생성과정(Regenerative progress)

확률과정 $\{N(t),\ t \geq 0\}$ 안에 확률적으로 동일한 시점 $t_1, t_2, \cdots$ 들이 존재하여 t_i 이후의 과정이 $t_j (i < j)$ 이후의 과정과 확률적으로 동일하며 과거와 독립이면 $t_1, t_2, \cdots$ 들을 재생성점(regeneration point)이라고 하고 $\{t_n - t_{n-1}\}$ 들을 재생사이클(regeneration cycle)이라고 한다. 이때, 이와 같은 성격을 만족하는 확률과정 $\{N(t),\ t \geq 0\}$를 재생성과정(regenerative process)이라고 한다. 예를 들어 M/M/1 대기행렬에서 도착 직후 고객수가 i가 되는 모든 시점들은 각각 재생성점이다. 그림 <2.2>는 M/M/1 대기행렬에서 임의의 도착 직후 고객수가 2명이 되는 점을 재생성점으로 하였을 경우의 사이클을 그린 것이다.



<그림 2.2> 재생성과정으로 본 M/M/1 대기행렬

이제 확률과정 $\{N(t), t \geq 0\}$가 재생성과정이라는 가정 하에 시스템 상태가 j인 총시간을 T_j라고 하고 T_c를 한 사이클의 길이라고 하자. 그러면 극한확률 $P_j = \lim_{t \to \infty} Pr[N(t) = j]$는 다음의 정리를 이용하여 구할 수 있다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

<정리 2.1> $E(T_c) < \infty$이라는 조건 하에 다음이 성립한다.

$$P_j = \lim_{t \to \infty} Pr[N(t) = j] = \frac{E(T_j)}{E(T_c)}. \tag{2.2.1}$$

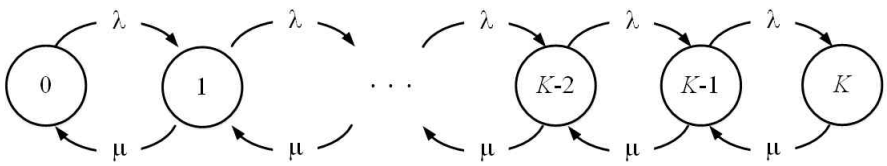
<정리 2.2> 재생성과정 $\{N(t), t \geq 0\}$에서 $I_j(t)$를 t 동안 상태 j에서 머문 총시간이라 정의하면 다음이 성립한다.

(a) $\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_j(u)du = P_j = \frac{E(T_j)}{E(T_c)}$, (확률 1로), (2.2.2)

(b) $\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t E[I_j(u)]du = P_j = \frac{E(T_j)}{E(T_c)}$. (2.2.3)

2.3 M/M/1/K 대기행렬시스템

M/M/1/K 대기행렬시스템은 M/M/1 대기행렬시스템과 동일하되 시스템 내에 존재할 수 있는 고객수가 서비스 받고 있는 고객을 포함하여 최대 K까지 허락되는 경우이다. 따라서 K명의 고객이 있을 때 도착하는 고객들은 도착하는 즉시 시스템을 이탈한다. 이 시스템의 전이율다이아그램은 다음과 같이 주어진다.



<그림 2.3> M/M/1/K 시스템의 고객수과정에 대한 전이율다이어그램

M/M/1/K 대기행렬시스템에서는 시스템이 가득 차면 시스템 자체가 고객을 차단하므로 안정상태에 도달하기 위해 $\rho = \lambda E(S) = \lambda/\mu < 1$일 필요는 없으며 $\rho > 1$이더라도 항상 안정상태에 도달할 수 있다. M/M/1/K 대기행렬시스템의 안정상태고객수 확률은 다음과 같이 주어진다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{K+1}}, & (\rho \neq 1), \\ \dfrac{1}{K+1}, & (\rho = 1). \end{cases} \quad (n = 0,1,2,\ldots,K), \tag{2.3.1}$$

따라서 안정상태 고객수의 평균을 구하면 다음과 같다.

$$L = \sum_{n=0}^{K} nP_n = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{(K+1)\rho^{K+1}}{(1-\rho^{K+1})}, & (\rho \neq 1), \\ \dfrac{K}{2}, & (\rho = 1). \end{cases} \tag{2.3.2}$$

본 논문의 대상이 되는 시스템을 분석하기 위해서는 위의 결과와 더불어 M/M/1/K의 바쁜 기간의 분석이 매우 중요한 역할을 하므로 이를 소개한다. 본 논의는 Takagi and Tarabia [28] 결과를 따른다. 도착률이 λ이고 서비스율이 μ인 M/M/1/K 대기행렬을 생각하자. 이제 $N(t)$를 시점 t에서의 고객수라 하고 다음과 같은 확률을 정의하자.

$$p_{(i)}(k,t|\lambda,\mu,K) = \Pr[N(t) = k,\ 0 < N(u) \leq K \ for\ 0 \leq u \leq t \,|\, N(0) = i], \quad k = 1,2,\ldots,K. \tag{2.3.3}$$

위에서 $p_{(i)}(k,t)$는 결국 i명으로 시작한 M/M/1/K 대기행렬시스템이 t 동안 바쁜기간이 끝나지 않은 채 시점 t에 k명의 고객을 남길 확률로 해석할 수 있다. 이제 위의 확률을 이용하여 다음과 같은 변환을 정의하자.

$$P^*_{(i)}(k,\theta|\lambda,\mu,K) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} p_{(i)}(k,t)dt \quad , \ \widetilde{P}^*_{(i)}(z,\theta|\lambda,\mu,K) = \sum_{k=1}^{K} z^n p^*_{(i)}(k,\theta). \tag{2.3.4}$$

Takagi 와 Tarabia [28]의 결과를 이용하면 다음을 얻는다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$$\widetilde{P}^{*}_{(i)}(z,\theta|\lambda,\mu,K)=\frac{z^{i+1}+\lambda z^{K+1}(1-z)P^{*}_{(i)}(K,\theta|\lambda,\mu,K)-z\mu P^{*}_{(i)}(1,\theta|\lambda,\mu,K)}{\theta z-(\mu-\lambda z)(1-z)}\ . \quad (2.3.5)$$

여기서,

$$P^{*}_{(i)}(K,\theta|\lambda,\mu,K)=\frac{[B^{*}(\theta|\lambda,\mu)]^{i}-[A^{*}(\theta|\lambda,\mu)]^{i}}{\lambda\{[B^{*}(\theta|\lambda,\mu)]^{K}\cdot[B^{*}(\theta|\lambda,\mu)-1]+[A^{*}(\theta|\lambda,\mu)]^{K}\cdot[1-A^{*}(\theta|\lambda,\mu)]\}}\ , \quad (2.3.6)$$

$$P^{*}_{(i)}(1,\theta|\lambda,\mu,K)=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-i}\frac{[B^{*}(\theta|\lambda,\mu)]^{K-i}\cdot[B^{*}(\theta|\lambda,\mu)-1]+[A^{*}(\theta|\lambda,\mu)]^{K-i}\cdot[1-A^{*}(\theta|\lambda,\mu)]}{\mu\{[B^{*}(\theta|\lambda,\mu)]^{K}\cdot[B^{*}(\theta|\lambda,\mu)-1]+[A^{*}(\theta|\lambda,\mu)]^{K}\cdot[1-A^{*}(\theta|\lambda,\mu)]\}}\ , \quad (2.3.7)$$

이며,

$$A^{*}(\theta|\lambda,\mu)=\frac{\theta+\lambda+\mu-\sqrt{(\theta+\lambda+\mu)^{2}-4\lambda\mu}}{2\lambda}\ , \quad (2.3.8)$$

$$B^{*}(\theta|\lambda,\mu)=\frac{\theta+\lambda+\mu+\sqrt{(\theta+\lambda+\mu)^{2}-4\lambda\mu}}{2\lambda}\ , \quad (2.3.9)$$

이다.

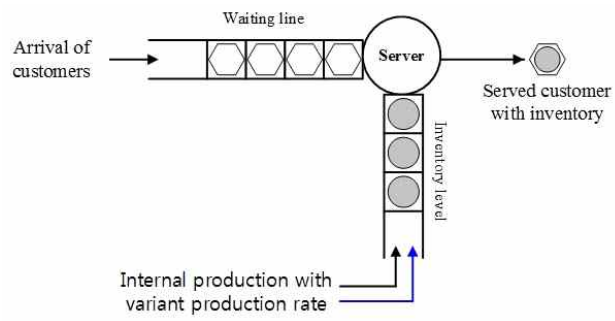
Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제 3 장 가변 생산속도 및 판매상실을 갖는 생산-재고 모형의 분석

3.1 시스템 설명

본 장에서는 가변 생산속도 및 판매상실을 갖는 생산-재고 모형을 분석한다. 아래의 그림은 가변 생산속도 및 판매상실을 갖는 생산-재고 모형을 도식화한 것이다.



<그림 3.1> 가변 생산속도 및 판매상실을 갖는 생산-재고 모형

가변 생산속도 및 판매상실을 갖는 생산-재고 모형은 다음과 같은 특성을 갖는다. 고객은 도착률이 λ인 포아송과정으로 도착하고, 각 고객의 서비스 시간은 독립적이고 동일한 지수분포를 따른다. 서비스 시간의 평균은 $1/\mu$이다. 서버는 내부에 재고가 있을 경우에만 서비스를 제공한다. 또한 고객이 서비스를 받고 나가는순간 재고량이 한 단위만큼 감소한다고 가정한다. 재고가 모두 소진되면 시스템에 내부에 존재하는 고객은 재고가 보충될 때까지 시스템 내부에서 대기한다. 재고가 고갈되어 서비스를 제공하지 못하는 구간을 재고부족기간(stock-out period)로 부르기로 한다. 이 기간 중에 새로 도착하는 고객은 서비스를 받지 못한 채 시스템을 이탈한다 (lost-sales). 재고의 최대량은 S로 가정한다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

소진된 재고는 $1/\beta$이 평균인 지수분포를 따르는 생산시간마다 내부의 생산시설에 의해 하나씩 보충되되, 재고량이 최초로 $s(<S)$가 줄어드는 순간 생산속도가 증가하여 재고창고를 가득 채울 때까지 동일한 속도로 생산을 지속한다고 가정한다. 재고창고가 가득차면 생산속도는 원래의 속도로 감소한다. 증가된 생산속도는 평균이 $1/\gamma$인 지수분포를 따른다 ($\beta<\gamma$). 이때 생산률이 β인 기간을 저속 생산 기간 (low-speed period), γ인 기간을 고속 생산 기간 (high-speed period)이라 부르기로 한다. 본 논문에서는 분석의 편의상 $\beta<\lambda<\gamma$를 가정한다.

3.2 기호와 확률 정리

본 논문에서는 사용하게 될 기호와 확률은 다음과 같다.

S : 재고의 최대값

s : 생산속도 변경점

T_L : 저속 생산 기간의 길이 (확률변수)

T_H : 고속 생산 기간의 길이 (확률변수)

C : 사이클의 길이 (확률변수)

$N(t)$: 시점 t 의 고객수 (확률변수)

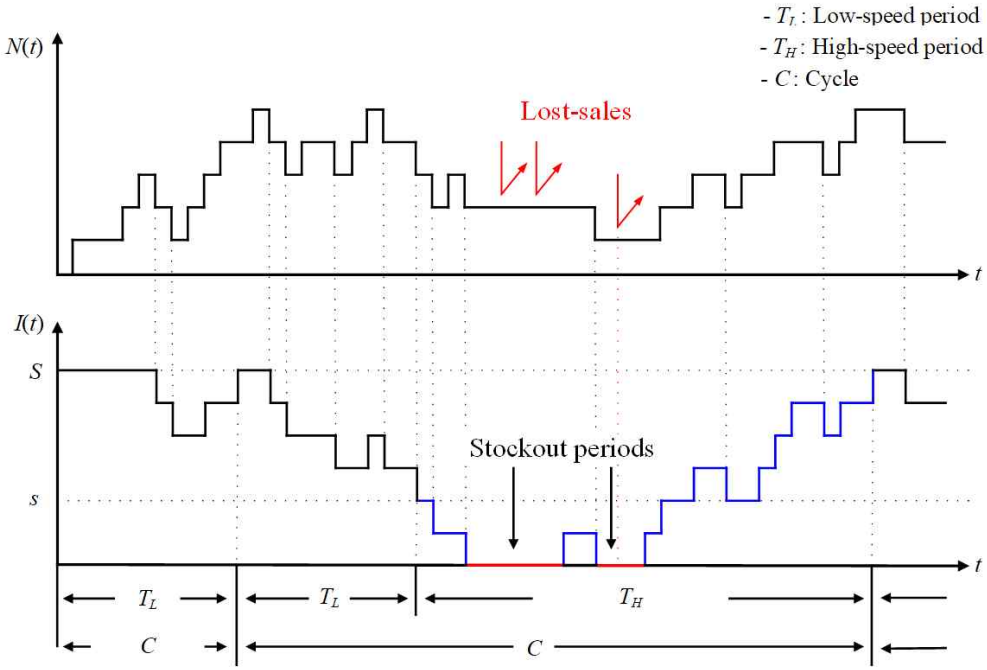
$I(t)$: 시점 t 의 재고량 (확률변수)

$$\xi(t)=\begin{cases}1, (\text{시점 } t\text{에 생산 속도가 빠르면})\\ 2, (\text{시점 } t\text{에 생산 속도가 느리면})\end{cases}$$

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

아래의 <그림 3.2>는 위의 기호를 이용하여 시스템의 샘플경로를 그린 것이다.



<그림 3.2> 가변 생산속도 및 판매상실을 갖는 생산-재고모형의 샘플경로

여기서 재고량 S 가 되는 시점들은 재생성점이 될 수 없다는 점에 유의해야 한다. 이는 분석의 편의를 위해 사이클로 부르기로 한 것이다. 따라서 시스템 분석을 위해 재생성과정을 직접 이용할 수는 없다. 왜냐하면 재고량이 S 가 되는 시점에서의 고객수에 따라 앞으로의 과정이 영향을 받기 때문이다. 그러나 이와 같은 사이클 기반의 시스템 구성은 3.4절에서 소개할 변조된 시스템의 분석을 위해 핵심적인 역할을 하게 된다.

3.3 안정상태 방정식

본 장에서는 가변 생산속도를 갖는 생산-재고모형의 분석을 위한 안정상태 방정식을 유도한다. 우선 다음과 같은 확률을 정의하자.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$$X_1(n,k,t) = \Pr[N(t)=n, I(t)=k, \xi(t)=1] \ ,$$
$$X_2(n,k,t) = \Pr[N(t)=n, I(t)=k, \xi(t)=2] \ ,$$
$$X_1(n,k) = \lim_{t\to\infty} X_1(n,k,t) \ , \quad X_2(n,k) = \lim_{t\to\infty} X_2(n,k,t) \ .$$

위의 식을 이용하면 다음과 같은 시스템방정식을 얻는다.

$$X_1(0,S,t+\Delta t) = X_1(0,S,t)(1-\lambda\Delta t) + X_1(0,S-1,t)\beta\Delta t + X_2(0,S-1,t)\gamma\Delta t, \tag{3.3.1}$$

$$X_1(n,S,t+\Delta t) = X_1(n,S,t)(1-\lambda\Delta t) - X_1(n,S,t)\mu\Delta t + X_1(n-1,S,t)\lambda\Delta t + X_1(n,S-1,t)\beta\Delta t + X_2(n,S-1,t)\gamma\Delta t, \quad n \geqq 1, \tag{3.3.2}$$

$$X_1(0,k,t+\Delta t) = X_1(0,k,t)(1-\lambda\Delta t) - X_1(0,S-1,t)\beta\Delta t + X_1(1,k+1,t)\mu\Delta t + X_1(0,k-1,t)\beta\Delta t, \quad k = S-1,\ldots,s+2 \ , \tag{3.3.3}$$

$$X_1(n,k,t+\Delta t) = X_1(n,k,t)(1-\lambda\Delta t) - X_1(n,k,t)\beta\Delta t - X_1(n,k,t)\mu\Delta t + X_1(n-1,k,t)\lambda\Delta t + X_1(n+1,k+1,t)\mu\Delta t + X_1(0,k-1,t)\beta\Delta t, \quad n \geqq 1, k = S-1,\ldots,s+2 \ , \tag{3.3.4}$$

$$X_1(0,s+1,t+\Delta t) = X_1(0,s+1,t)(1-\lambda\Delta t) - X_1(0,s+1,t)\beta\Delta t + X_1(1,s+2,t)\mu\Delta t \ , \tag{3.3.5}$$

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$$X_1(n,s+1,t+\Delta t) = X_1(n,s+1,t)(1-\lambda\Delta t) - X_1(n,s+1,t)\mu\Delta t - X_1(n,s+1,t)\beta\Delta t) + X_1(n-1,s+1,t)\lambda\Delta t + X_1(n+1,s+2,t)\mu\Delta t, \quad n \geqq 1, \tag{3.3.6}$$

$$X_2(0,k,t+\Delta t) = X_2(0,k,t)(1-\lambda\Delta t) - X_2(0,k,t)\gamma\Delta t + X_2(1,k+1,t)\mu\Delta t + X_2(0,k-1,t)\gamma\Delta t, \quad k=1,\ldots,s-1,s+1,s+2,\ldots,S-1, \tag{3.3.7}$$

$$X_2(n,k,t+\Delta t) = X_2(n,k,t)(1-\lambda\Delta t) - X_2(n,k,t)\mu\Delta t - X_2(n,k,t)\gamma\Delta t + X_2(n-1,k,t)\lambda\Delta t + X_2(n+1,k+1,t)\mu\Delta t + X_2(n,k-1,t)\gamma\Delta t, \quad n \geqq 1,\ k=1,\ldots,s-1,s+1,s+2,\ldots,S-1, \tag{3.3.8}$$

$$X_2(0,s,t+\Delta t) = X_2(0,s,t)(1-\lambda\Delta t) - X_2(0,s,t)\gamma\Delta t + X_1(1,s+1,t)\mu\Delta t + X_2(1,s+1,t)\mu\Delta t + X_2(0,s-1,t)\gamma\Delta t, \tag{3.3.9}$$

$$X_2(n,s,t+\Delta t) = X_2(n,s,t)(1-\lambda\Delta t) - X_2(n,s,t)\mu\Delta t - X_2(n,s,t)\gamma\Delta t + X_2(n-1,s,t)\lambda\Delta t + X_1(n+1,s+1,t)\mu\Delta t + X_2(n+1,s+1,t)\mu\Delta t + X_2(n,s-1,t)\gamma\Delta t, \quad n \geqq 1, \tag{3.3.10}$$

$$X_2(0,0,t+\Delta t) = X_2(0,0,t)(1-\gamma\Delta t) + X_2(1,1,t)\mu\Delta t, \tag{3.3.11}$$

$$X_2(n,0,t+\Delta t) = X_2(n,0,t)(1-\gamma\Delta t) + X_2(n+1,1,t)\mu\Delta t, \quad n \geqq 1. \tag{3.3.12}$$

이제 식 (3.3.1)-(3.3.12)의 양변을 Δt로 나누고 $\Delta t \to 0$ 를 취하면 다음을 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial t}X_1(0,S,t) = -\lambda X_1(0,S,t) + \beta X_1(0,S-1,t) + \gamma X_2(0,S-1,t), \tag{3.3.13}$$

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$$\frac{\partial}{\partial t}X_1(n,S,t) = -(\lambda+\mu)X_1(n,S,t) + \lambda X_1(n-1,S,t) + \beta X_1(n,S-1,t) \tag{3.3.14}$$
$$+\beta X_1(n,S-1,t) + \gamma X_2(n,S-1,t) \ , \quad n \geqq 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}X_1(0,k,t) = -(\lambda+\beta)X_1(0,k,t) + \mu X_1(1,k+1,t) + \beta X_1(0,k-1,t), \tag{3.3.15}$$
$$k = S-1,\ldots,s+2 \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}X_1(n,k,t) = -(\lambda+\mu+\beta)X_1(n,k,t) + \lambda X_1(n-1,k+1,t) \tag{3.3.16}$$
$$+\mu X_1(n+1,k+1,t) + \beta X_1(n,k-1,t) \ ,$$
$$n \geqq 1, \ \ k = S-1,\ldots,s+2 \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}X_1(0,s+1,t) = -(\lambda+\beta)X_1(0,s+1,t) + \mu X_1(1,s+2,t), \tag{3.3.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}X_1(n,s+1,t) = -(\lambda+\mu+\beta)X_1(n,s+1,t) \tag{3.3.18}$$
$$+\lambda X_1(n-1,s+1,t) + \mu X_1(n+1,s+2,t), \ \ n \geqq 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}X_2(0,k,t) = -(\lambda+\gamma)X_2(0,k,t) + \mu X_2(1,k+1,t) + \gamma X_2(0,k-1,t), \tag{3.3.19}$$
$$k = 1,\ldots,s-1,s+1,s+2,\ldots,S-1 \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}X_2(n,k,t) = -(\lambda+\mu+\gamma)X_2(n,k,t) + \lambda X_2(n-1,k,t) \tag{3.3.20}$$
$$+\mu X_2(n+1,k+1,t) + \gamma X_2(n,k-1,t),$$
$$n \geqq 1, \ \ k = 1,\ldots,s-1,s+1,s+2,\ldots,S-1 \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}X_2(0,s,t) = -(\lambda+\gamma)X_2(0,s,t) + \mu X_1(1,s+1,t) \tag{3.3.21}$$
$$+\mu X_2(1,s+1,t) + \gamma X_2(0,s-1,t) \ ,$$

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$$\frac{\partial}{\partial t}X_2(n,s,t) = -(\lambda+\mu+\gamma)X_2(n,s,t)+\lambda X_2(n-1,s,t) \tag{3.3.22}$$
$$+\mu X_1(n+1,s+1,t)+\mu X_2(n+1,s+1,t)+\gamma X_2(n,s-1,t),$$
$$n \geqq 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}X_2(0,0,t) = -\gamma X_2(0,0,t)+\mu X_2(1,1,t), \tag{3.3.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}X_2(n,0,t) = -\gamma X_2(n,0,t)+\mu X_2(n+1,1,t), \quad n \geqq 1. \tag{3.3.24}$$

이제 $t \to \infty$ 를 취하면 다음의 안정상태방정식을 얻는다.

$$0 = \lambda X_1(0,S)+\beta X_1(0,S-1)+\gamma X_2(0,S-1), \tag{3.3.25}$$

$$0 = -(\lambda+\mu)X_1(0,S)+\lambda X_1(n-1,S)+\beta X_1(n,S-1)+\gamma X_2(n,S-1), \tag{3.3.26}$$
$$n \geqq 1,$$

$$0 = -(\lambda+\beta)X_1(0,k)+\mu X_1(1,k+1)+\beta X_1(0,k-1), \quad k = S-1,\ldots,s+2, \tag{3.3.27}$$

$$0 = -(\lambda+\mu+\beta)X_1(n,k)+\lambda X_1(n-1,k)+\mu X_1(n+1,k+1)+\beta X_1(n,k-1), \tag{3.3.28}$$
$$n \geqq 1, \quad k = S-1,\ldots,s+2,$$

$$0 = -(\lambda+\beta)X_1(0,s+1)+\mu X_1(1,s+2), \tag{3.3.29}$$

$$0 = -(\lambda+\mu+\beta)X_1(n,s+1)+\lambda X_1(n-1,s+1)+\mu X_1(n+1,s+2), \quad n \geqq 1, \tag{3.3.30}$$

$$0 = -(\lambda+\gamma)X_2(0,k)+\mu X_2(1,k+1)+\gamma X_2(0,k-1), \tag{3.3.31}$$
$$k = 1,\ldots,s-1,s+1,s+2,\ldots,S-1,$$

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$$0 = -(\lambda+\mu+\gamma)X_2(n,k) + \lambda X_2(n-1,k) + \mu X_2(n+1,k+1) + \gamma X_2(n,k-1), \quad (3.3.32)$$
$$n \geqq 1, \ k = 1,\ldots,s-1,s+1,s+2,\ldots,S-1,$$

$$0 = -(\lambda+\gamma)X_2(0,s,t) + \mu X_1(1,s+1,t) + \mu X_2(1,s+1,t) + \gamma X_2(0,s-1,t), \quad (3.3.33)$$

$$0 = -(\lambda+\mu+\gamma)X_2(n,s) + \lambda X_2(n-1,s) + \mu X_1(n+1,s+1) \quad (3.3.34)$$
$$+ \mu X_2(n+1,s+1) + \gamma X_2(n,s-1), \quad n \geqq 1,$$

$$0 = -\gamma X_2(0,0) + \mu X_2(1,1), \quad (3.3.35)$$

$$0 = -\gamma X_2(n,0) + \mu X_2(n+1,1), \quad n \geqq 1. \quad (3.3.36)$$

따라서 식 (3.3.25)-(3.3.36)를 풀면 가변 생산속도 및 판매상실을 갖는 생산-재고모형에 대한 고객수 및 재고량에 대한 결합확률분포를 유도할 수 있다.

3.4 곱 형태의 해 유도

식 (3.3.25)-(3.3.36)를 그대로 푸는 것은 쉽지 않다. 이는 고객수에 대한 확률과 재고량에 대한 확률이 서로 복잡한 상관관계를 갖고 있기 때문이다. 그러나 최근 이와 같은 문제점을 해결하기 위한 많은 연구가 진행되었으며, 특히 판매상실을 가정한 내부재고가 있는 대기행렬모형의 안정상태 하의 결합확률분포는 고객수 확률과 재고량 확률이 분해된 형태로 나타낼 수 있다는 사실이 밝혀졌다 [19, 20, 25]. 이는 재고부족기간(stock-out period) 동안의 고객수과정이 어떠한 변화 없이 그대로 유지된다는 가정에 의해 가능하다는 것이 알려져 있는데, 이 경우 안정상태 고객수 확률은 일반적인 M/M/1 대기행렬시스템의 안정상태 고객수 확률과 동일하게 주어진다. 즉, 아래와 같이 재고량에 대한 안정상태 주변확률분포를 정의하면

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$$\chi_1(k,t) = \Pr[I(t)=k, \xi(t)=1],$$
$$\chi_2(k,t) = \Pr[I(t)=k, \xi(t)=2],$$
$$\chi_1(k) = \lim_{t\to\infty}\chi_1(k,t), \quad \chi_2(k) = \lim_{t\to\infty}\chi_2(k,t).$$

앞서 정의한 결합확률분포에 대하여 다음과 같은 형태의 해를 구할 수 있다는 것을 의미한다.

$$X_1(n,k) = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \chi_1(k), \tag{3.4.1}$$

$$X_2(n,k) = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \chi_2(k). \tag{3.4.2}$$

이제 이를 확인하기 위해 식 (3.3.25)와 (3.3.26)에 식 (3.4.1)과 (3.4.2)를 대입하자. 여기서 식 (3.3.25)와 (3.3.26)는 재고량이 최대가 되는 상황과 그 상황을 벗어나는 상황에 대한 평형방정식이며, 식 (3.3.25)는 고객수가 0일 경우를 나타내고 식 (3.3.26)는 고객수가 1이상인 경우를 나타낸다. 그러면 식 (3.3.25)와 (3.3.26) 공히 다음의 식을 얻는다.

$$\lambda\chi_1(S) = \beta\chi_1(S-1) + \gamma\chi_2(S-1). \tag{3.4.3}$$

이는 결국 식 (3.3.25)와 (3.3.26)에 대하여 식 (3.4.1)과 (3.4.2)의 형태가 만족한다는 것을 의미한다. 따라서 식 (3.3.27)-(3.3.36) 역시 이 관계가 완벽하게 성립함을 보이면, $\chi_1(k)$과 $\chi_2(k)$만을 유도하여 원래 시스템의 고객수와 재고량에 대한 결합확률분포를 완벽하게 구할 수 있다.

이제 식 (3.3.27)-(3.3.36) 및 식 (3.4.1)과 (3.4.2)를 이용하면, 고객수 조건에 상관없이 재고량에 대하여 다음과 같은 안정상태 방정식을 얻는다.

$$(\beta+\lambda)\chi_1(k) = \beta\chi_1(k-1) + \lambda\chi_1(k+1), \quad k = S-1,\ldots,s+2, \tag{3.4.4}$$

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$$(\lambda+\beta)\chi_1(s+1)=\lambda\chi_1(s+2), \tag{3.4.5}$$

$$(\lambda+\gamma)\chi_2(k)=\gamma\chi_2(k-1)+\lambda\chi_2(k+1), \quad k=1,\ldots,s-1,s+1,\ldots,S-1, \tag{3.4.6}$$

$$(\lambda+\gamma)\chi_2(s)=\gamma\chi_2(s-1)+\lambda\chi_1(s+1)+\lambda\chi_2(s+1), \tag{3.4.7}$$

$$\gamma\chi_2(0)=\lambda\chi_2(1). \tag{3.4.8}$$

따라서 가변 생산속도 및 판매상실을 갖는 생산-재고모형에 대하여 식 (3.4.1)과 (3.4.2)의 관계가 성립함을 알 수 있으며, 식 (3.4.3)-(3.4.8)을 풀어 $\chi_1(k)$과 $\chi_2(k)$만을 풀어 고객수와 재고량에 대한 분해된 형태의 결합확률분포를 완벽하게 유도할 수 있다.

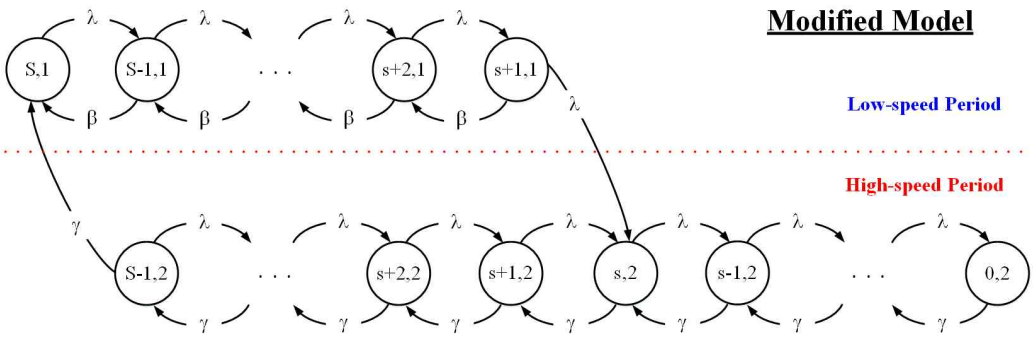
식 (3.4.3)-(3.4.8)을 자세히 살피면 새로운 형태의 재고모형에 대한 안정상태 방정식이 됨을 알 수 있다. 위의 식을 만족하는 재고모형을 '변조된 재고모형 (modified inventory model)' 이라 하고 다음과 같이 정의하자.

<정의 3.1> (변조된 재고모형, modified inventory model) 고객은 도착률이 λ인 포아송과정으로 도착하고 도착 즉시 재고를 갖고 시스템을 이탈한다. 재고량의 최대값은 S이다. 재고는 평균이 $1/\beta$ 인 지수분포를 따르는 생산시간마다 하나씩 보충되되, 재고량이 처음으로 $s(<S)$로 줄어드는 순간 생산 속도가 증가하여 평균이 $1/\gamma$인 지수분포 시간마다 하나씩 보충된다고 가정한다 $\beta<\gamma$. 재고가 없는 기간 중에 도착한 고객은 시스템을 그대로 이탈한다고 가정한다. 이와 같은 생산-재고시스템을 변조된 재고모형으로 정의한다.

식 (3.4.3)-(3.4.8) 및 <정의 3.4.1> 바탕으로 변조된 재고모형의 전이율 다이어그램을 그리면 다음과 같다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY



<그림 3.3> 변조된 재고모형의 전이율다이어그램

이제 다음의 정리를 얻는다.

<정리 3.1> $\chi_2(k)$는 다음과 같다.

$$\chi_2(k)=\begin{cases}\dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\gamma}\right)^{s-k}-\left(\dfrac{\lambda}{\gamma}\right)^{S-k}}{K\cdot(\gamma-\lambda)}, & (k=0,1,2,\cdots,s),\\[2ex] \dfrac{1-\left(\dfrac{\lambda}{\gamma}\right)^{S-k}}{K\cdot(\gamma-\lambda)}, & (k=s+1,s+2,\ \cdots,S-1).\end{cases} \tag{3.4.9}$$

여기서, K 는 정규화상수이다.

(증명) 고속 생산 기간은 s의 재고량으로 시작하여 S의 재고가 채워지는 순간 끝난다. 고속 생산 기간 동안 재고의 생산속도는 평균이 $1/\gamma$인 지수분포를 따르며, 수요는 도착률이 λ인 포아송 과정을 따른다. 결국, 고속 생산 기간은 $S-s$명으로 시작한 M/M/1/S 대기행렬의 고객수가 처음으로 0 명이 될 때까지의 시간과 같다. 또한 식 (2.3.3)의 $p_{(i)}(k,t)$가 i명으로 시작한 M/M/1/K 대기행렬시스템이 t 동안 바쁜기간이 끝나지 않은 채 시점 t에 k명의 고객을 남길 확률임을 상기하면, 다음의 관계가 성립함을 알 수 있다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$$\chi_2(k) = \frac{1}{K}\frac{P^*_{(S-s)}(S-k,\theta|\lambda,\mu,S)\big|_{\theta=0}}{\widetilde{P}^*_{(S-s)}(z,\theta|\lambda,\mu,S)\big|_{\theta=0,z=1}}. \tag{3.4.10}$$

$$= \frac{1}{K}\frac{\int_0^\infty P_{(S-s)}(S-k,t|\lambda,\mu,S)dt}{\sum_{k=0}^{S-1}\int_0^\infty P_{(S-s)}(S-k,t|\lambda,\mu,S)dt}, \quad k=0,1,\ldots,S-1.$$

이제 Takagi 와 Tarabia [28]의 결과를 이용하면 식 (3.4.9)를 얻는다. ■

이제 $\chi_1(k)$를 구하자. $\chi_1(k)$에 대하여 다음의 정리를 얻는다.

<정리 3.2> $\chi_1(k)$는 다음과 같다.

$$\chi_1(k) = \frac{1}{K}\cdot\frac{\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{k-s}-1}{\beta-\lambda}, \quad k=s+1,s+2,\cdots,S. \tag{3.4.11}$$

(증명) <그림 3.3>에서 저속 생산 기간과 고속생산구간의 절단을 이용하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\gamma\chi_2(S-1) = \lambda\chi_1(s+1). \tag{3.4.12}$$

따라서 식 (3.4.9)를 이용하여 다음을 얻는다.

$$\chi_1(s+1) = \frac{1/\lambda}{K}. \tag{3.4.13}$$

또한 식 (3.4.3)과 (3.4.12)를 이용하면 다음을 얻는다.

$$\chi_1(S) = \frac{\beta}{\lambda}\chi_1(S-1)+\chi_1(s+1). \tag{3.4.14}$$

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

이제 식 (3.4.14)와 식 (3.4.4)를 이용하면 $k=s+2,\cdots,S$ 에 대하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\chi_1(k)=\frac{\beta}{\lambda}\chi_1(k-1)+\chi_1(s+1),\quad k=s+2,s+2,\cdots,S. \tag{3.4.15}$$

따라서 $\chi_1(k)$는 다음의 축차식을 풀어 완전하게 구할 수 있다.

$$\chi_1(k)+\frac{\lambda\chi_1(s+1)}{\beta-\lambda}=\frac{\beta}{\lambda}\left[\chi_1(k-1)+\frac{\lambda\chi_1(s+1)}{\beta-\lambda}\right],\ k=s+2,s+2,\cdots,S. \tag{3.4.16}$$

이제 위의 식 (3.4.13)을 초기 조건으로 위의 축차식을 풀면 다음의 해를 얻는다.

$$\chi_1(k)=\frac{1}{K(\beta-\lambda)}\left[\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{k-s}-1\right],\quad k=s+1,s+2,\cdots,S. \tag{3.4.17}$$

■

이제 식 (3.4.9)와 식 (3.4.11)를 완전하게 유도하기 위해 정규화 상수 K를 구해야한다. 이는 다음의 정규화조건으로 부터 유도할 수 있다.

$$\sum_{k=s+1}^{S}\chi_1(k)+\sum_{k=0}^{S-1}\chi_2(k)=1\,. \tag{3.4.27}$$

식 (3.4.27)에 식 (3.4.9)와 식 (3.4.11)를 이용하면 K는 다음과 같다.

$$K=\frac{S-s}{\lambda-\beta}-\frac{\beta\left[1-\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{S-s}\right]}{(\lambda-\beta)^2}+\frac{S-s}{\gamma-\lambda}-\frac{\lambda\left[\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{s}-\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{S}\right]}{(\gamma-\lambda)^2}\,. \tag{3.4.28}$$

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

3.5 성능척도

본 장에서는 앞서 구한 결과를 이용하여 평균 성능척도를 유도한다. 식 (3.4.1)과 (3.4.2)로부터 안정상태 고객수 확률분포는 재고량의 확률분포와 독립이며 일반적인 M/M/1과 동일함을 알 수 있다. 따라서 $E(N)$을 고객수 평균이라 정의하면 다음을 얻는다.

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}. \tag{3.5.1}$$

이제 평균재고량을 유도하자. 먼저 저속 생산 기간 동안의 평균재고량을 $E(I_{low})$ 라 정의하면, 식 (3.4.17)을 이용하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} E(I_{low}) &= \sum_{k=s+1}^{S} k \cdot \chi_1(k) \qquad (3.5.2) \\ &= \sum_{k=s+1}^{S} k \cdot \frac{1}{K(\beta-\lambda)}\left[\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{k-s}-1\right] \\ &= \frac{1}{K(\beta-\lambda)}\sum_{k=s+1}^{S} k \cdot \left[\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{k-s}-1\right] \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(S-s)(S+s+1)}{(\lambda-\beta)\cdot K} + \frac{\beta\left(S\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{S-s}-s\right)}{(\lambda-\beta)^2\cdot K} + \frac{\beta\left(\lambda\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{S-s}-\lambda\right)}{(\lambda-\beta)^3\cdot K}. \end{aligned}$$

여기서, K는 정규화 상수로 식 (3.4.28)로부터 얻는다.

식 (3.5.2)는 임의시점의 관찰시점에 시스템이 저속 생산 기간에 있을 확률을 포함하는 평균이다. 식 (3.4.9)를 이용하면 고속 생산 기간 동안의 평균재고량을 유도할 수 있다. 고속 생산 기간 동안의 평균 재고량을 $E(I_{high})$라고 정의하자. 그러면 다음을 얻는다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$$E(I_{high}) = \sum_{k=0}^{S-1} k \cdot \chi_2(k) \tag{3.5.3}$$

$$= \sum_{k=0}^{s} k \cdot \chi_2(k) + \sum_{k=s+1}^{S-1} k \cdot \chi_2(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{s} k \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{s-k} - \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{S-k}}{K(\gamma-\lambda)} + \sum_{k=s+1}^{S-1} k \cdot \frac{1-\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{S-k}}{K(\gamma-\lambda)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(S-s)((S+s-1)\gamma-(S+s+1)\lambda)}{(\gamma-\lambda)^2 \cdot K} + \frac{\gamma\lambda\left(\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{s} - \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{S}\right)}{(\gamma-\lambda)^3 \cdot K}.$$

식 (3.5.3) 역시 임의시점의 관찰시점에 시스템이 고속 생산 기간에 있을 확률을 포함하는 평균이다. 따라서 안정상태 임의의 시점에서의 재고량의 평균을 $E(I)$라 정의하면 식 (3.5.2)와 식 (3.5.3)을 더하여 다음을 얻는다.

$$E(I) = E(I_{low}) + E(I_{high}) \tag{3.5.4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(S-s)(S+s+1)}{(\lambda-\beta) \cdot K} + \frac{\beta\left(S\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{S-s} - s\right)}{(\lambda-\beta)^2 \cdot K} + \frac{\beta\left(\lambda\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{S-s} - \lambda\right)}{(\lambda-\beta)^3 \cdot K}$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{(S-s)((S+s-1)\gamma-(S+s+1)\lambda)}{(\gamma-\lambda)^2 \cdot K} + \frac{\gamma\lambda\left(\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{s} - \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{S}\right)}{(\gamma-\lambda)^3 \cdot K}.$$

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제 4 장 수치예

본 장에서는 3장의 결과를 이용하여 수치예를 보인다. 우선 s변화에 따른 평균재고량과 평균고객수에 대한 수치예를 보인다. 따라서 $\rho=0.7$, $\beta=0.5$, $\lambda=1$, $\gamma=2$, $S=10$로 고정한 채 s를 변화시켜 평균을 구하면 다음의 표를 얻는다.

s	$E(N)$	$E(I_{low})$	$E(I_{high})$	$E(I)$
1	2.33333	4.16435	1.50982	5.67417
2		4.41632	1.67739	6.09371
3		4.66808	1.86581	6.53389
4		4.90772	2.07411	6.98183
5		5.12192	2.30663	7.42855
6		5.29161	2.57452	7.86613
7		5.38439	2.90117	8.28556
8		5.33681	3.33681	8.67362
9		5.00244	4.00293	9.00537

<표 4.1> s변화에 따른 평균재고량과 평균고객수

<표 4.1>에서 고객수의 평균에 변화가 없는 까닭은 안정상태 하에서 고객수 분포와 재고량의 분포는 서로 독립이 때문이다. 따라서 λ와 μ값이 고정된 경우는 생산속도 및 s, S와 관계없이 동일한 결과를 얻게 된다.

이제 평균 비용을 최소화 하는 s와 S를 찾기 위한 비용함수를 정의하고 관련된 수치예를 보인다. 비용함수를 위해 다음과 같은 단위시간 당 비용을 정의하자.

- c_h : 단위시간 당 단위 재고를 유지하는데 드는 유지비용,
- c_{low} : 저속 생산 기간에 단위시간 머무는데 드는 비용,
- c_{high} : 고속 생산 기간에 단위시간 머무는데 드는 비용,
- c_{loss} : 단위 고객당 판매 손실 비용.

이제 $C(s,S)$를 시스템을 단위시간 당 운용하는데 드는 평균운용비용으로 정의하

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

면, 다음과 같은 비용함수를 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} EC(s,S) &= c_h E(I) + c_{low}\frac{E(T_L)}{E(C)} + c_{high}\frac{E(T_H)}{E(C)} + c_{loss}\lambda\chi_2(0) \ . \\ &= c_h E(I) + c_{low} + (c_{high} - c_{low})\frac{E(T_H)}{E(C)} + c_{loss}\lambda\chi_2(0) \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

식 (4.1.1)에서 $E(T_L)/E(C)$ 와 $E(T_H)/E(C)$는 각각 안정상태의 임의 시점에 저속 생산 기간 및 고속 생산 기간을 관찰할 확률이므로, 식 (3.4.9)과 (3.4.17)을 이용하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{E(T_L)}{E(C)} &= \sum_{k=s+1}^{S}\chi_1(k) \\ &= \sum_{k=s+1}^{S}\frac{1}{K(\beta-\lambda)}\left[\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{k-s} - 1\right] \\ &= \frac{S-s}{(\lambda-\beta)\cdot K} + \frac{\beta\left(1-\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{S-s}\right)}{(\lambda-\beta)^2\cdot K}, \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{E(T_H)}{E(C)} &= \sum_{k=0}^{S-1}\chi_2(k) \\ &= \sum_{k=0}^{s}\chi_2(k) + \sum_{k=s+1}^{S-1}\chi_2(k) \\ &= \sum_{k=0}^{s}\frac{\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{s-k} - \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{S-k}}{K(\gamma-\lambda)} + \sum_{k=s+1}^{S-1}\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{S-k}}{K(\gamma-\lambda)} \\ &= \frac{S-s}{(\gamma-\lambda)\cdot K} + \frac{\lambda\left(\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{S} - \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{s}\right)}{(\gamma-\lambda)^2\cdot K}. \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

이제 식 (3.5.4), (4.1.2) 및 (4.1.3)을 식 (4.1.1)에 이용하여 단위시간 당 운용비용을 최소화 하는 최적의 s 및 S를 결정하는 수치예를 보인다.

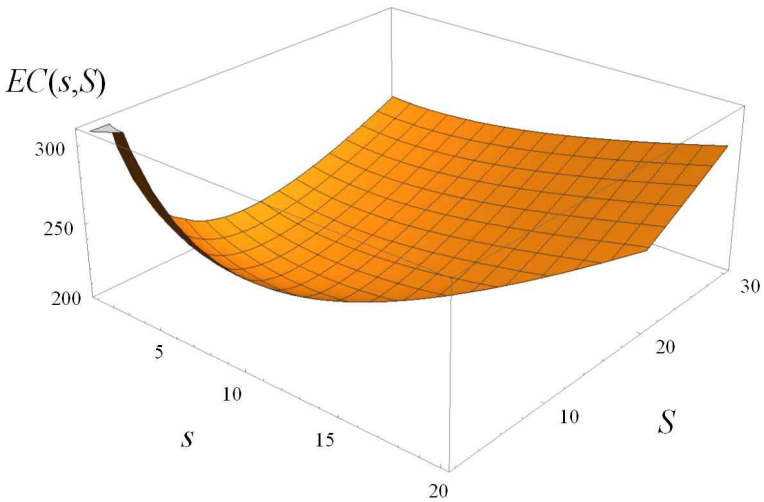
Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

우선 고속 생산 기간에 단위시간 머무는데 드는 비용이 전체 운용비용에 미치는 영향을 살피기 위해 c_{high}를 제외한 나머지 값을 다음과 같이 설정한다.

(설정 1) $\lambda = 2,\ \mu = 3,\ \beta = 1.1,\ \gamma = 2.2,\ c_{low} = 50,\ c_{loss} = 500,\ c_h = 10$

아래의 그림은 위의 설정에 $c_{high} = 100$로 설정하여 비용을 그린 것이며, 평균비용 값이 s와 S값에 따라 볼록 함수 (convex function)가 된다는 것을 보이고 있으며, 표 <4.2>는 c_{high}를 100, 125, 150, 175로 설정하였을 경우의 최적의 s^*와 S^* 및 그 때의 평균 운용비용 $EC(s^*, S^*)$를 보인 것이다.



<그림 4.1> $\lambda = 2,\ \mu = 3,\ \beta = 1.1,\ \gamma = 2.2,\ c_{low} = 50,$ $c_{high} = 100,\ c_{loss} = 500,\ c_h = 10$인 경우의 평균 비용

c_{loss}	s^*	S^*	$EC(s^*, S^*)$
100	7	12	203.34
125	7	12	222.89
150	6	12	242.12
175	5	12	280.54

<표 4.2> c_{high} 값의 변화에 따른 최적 평균 비용

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제 5 장 결론

본 연구에서는 가변 생산속도 및 판매상실을 갖는 생산-재고 모형을 분석하였다.

가변 생산속도를 갖는 생산-재고 모형의 분석을 위한 안정상태 방정식을 유도하였고 고객수 및 재고량에 대한 결합확률분포를 유도하였다. 기존의 밝혀진 안정상태 하의 결합확률분포는 고객수 확률과 재고량 확률이 분해된 형태로 나타낼 수 있다는 사실을 이용하여 고객수 조건에 상관없이 재고량에 대한 안정상태 방정식을 구하였다. 이로부터 가변 생산속도를 갖는 '변조된 재고모형'을 정의하여 저속 생산 기간과 고속 생산 기간의 재고량에 대한 확률을 구하였다. 이를 이용하여 임의시점에서 평균재고량을 유도하였다. 단위시간당 시스템을 운용하는데 드는 평균운용비용을 정의하여 평균비용을 최소화하는 s와 S를 유도하였다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

참고문헌

1. Artalejo, J.R. “On the M/G/1 queue with D-policy”, Applied Mathematical Modelling, 25, 1055-1069, 2001.

2. Artalejo, J.R. (2002), “A note on the optimality of the N- and D-policies for the M/G/1 queue”, Operations Research Letters, 30, 375-376, 2002.

3. Baek, J. W., Moon, S. K., “The M/M/1 queue with a production-inventory system and lost sales”, Applied Mathematics and Computation, Vol. 233, pp.534-544, 2014.

4. Baek, J. W., Bae, Y. H., Lee, H.W. and Ahn, S., “Continuous-type (s,Q)-inventory model with and attached M/M/1 queue and lost sales”, Performance Evaluation, Vol. 125, pp.68-79, 2018.

5. Balachandran, K.R., “Control Policies for a single server system”, Mgmt. Sci., 19, 1013-1018, 1973.

6. Balachandran, K.R. and Tijms, H., “On the D-policy for the $M/G/1$ queue”, Mgmt. Sci., 21(9), 1073-1076, 1975.

7. Boxma, O.J., “Note on a control problem of Balachandran and Tijms”, Mgmt. Sci., 22(8), 916-917, 1976.

8. Barron Y., Hermel D., “Shortage decision policies for a fluid production model with map arrivals”, International Journal of production Research, Vol. 55, pp.3946-3969, 2017.

9. Berman, O, Kim, E., “Stochastic models for inventory management at service facilities”, Stochastic Models, Vol. 15, No. 4, pp.695-718, 1999.

10. Bermand, O, Sapna, K., “Inventory management at service facilities for systems

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

with arbitrarily distributed service times", Stochasti Models, Vol. 16, No. 3&4, pp.343-360, 2000.

11. Bermand, O., Kaplan, E. H., Shevishak, D. G., "Deterministic approximations for inventory management at service facilities", IIE transactions, Vol. 25, No. 5, pp.98-104, 1993.

12. Bozer, Y. A., McGinnis, L. F., "Kitting versus line stocking: a conceptual framework and a descriptive model", International Journal of Production Economics, Vol. 28, No. 1, pp.1-19, 1992.

13. Brynzer, H., Johansson, M. I, "Design and performance of kitting and order picking systems", International Journal of production economics, Vol. 41, No. 1, pp.115-125, 1995.

14. Doshi, B.T., "Single server queues with vacations", Stochastic Analysis of Computer and Communication System (H. Takagi, ed), North-Holland, Amsterdam, 217-265, 1990.

15. Doshi, B.T., "Generalizations of the stochastic decomposition results for single server queues with vacations", Stochastic Models, 6(2), 307-333, 1990.

16. Harrison, J. M., "Assembly-like queues", Journal of Applied Probability, pp.354-367, 1973.

17. He, Q.-M., Jewkes, E., "Performance measures of a make-to-order inventory-production system", IIE Transactions, Vol. 32, No. 5, pp.409-419, 2000.

18. Heyman, D.P., "T-policy for the M/G/Q queue", Mgmt. Sci., 23, 775-778, 1977

19. Krishnamoorthy, A., Lakshmy, B., Manikandan, R., "A survey on inventory models with positive service time", OPSEARCH, Vol. 48, No. 2, pp.153-169, 2011.

20. Krishnamoorthy, A., Narayanan, V. C., "Production inventory wirh service time

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

and vacation to the server", IMA Journal of Management Mathematics, Vol. 22, No. 1, pp.33-45, 2011.

21. Krishnamoorthy, A., Viswanath, N. C., "Stochastic decomposition in production inventory with service time", European Jounal of Operational Research, Vol. 228, No. 2, pp.358-366, 2013.

22. Levy, Y. and Yechiali, U. "An M/M/s queue with servers' vacations", INFOR 14 153-163, 1976.

23. Lipper, E., Sengupta, B., "Assembly-like queues with nite capacity: bounds, asymptotics and approximations", Queueing Systems, Vol. 1, No. 1, pp67-83, 1986.

24. Marand A. J., Li H., Thorstenson A., "Joint inventory control and pricing in a service-inventory system", International Journal of production economics, 10.1016/j.ijpe.2017.07.008, 2017.

25. Saffari, M., Asmussen, S., Haji, R., "The M/M/1 queue with inventory, lost sale, and general lead times", Queueing Systems, Vol. 75, No. 1, pp.65-77, 2013.

26. Schwarz, M., Sauer, C., Daduna, H., Kulik, R., Szekli, R., "M/M/1 queueing systems with inventory", Queueing Systems, Vol. 54, No. 1, pp.55-78, 2006.

27. Schwarz, M., Daduna, H., "Queueing systems with inventory management with random lead times and with backordering", Mathematical Methods of Operations Research, Vol. 64, No. 3, pp.383-414, 2006.

28. Takagi H., Tarabia A.M.K. "Explicit Probability Density Function for the Length of a Busy Period in an M/M/1/K Queue", Advances in Queueing Theory and Network Applications. Springer, New York, 2009.

29. 이호우 (2006), 대기행렬이론-확률과정론적 분석 (제 3판), 시그마프레스

Collection @ chosun